Лекция 19

Первообразная и интеграл

На этой лекции мы изучим задачу, обратную задаче дифференцирования функции.

Определение 1. *Пусть функции F и f определены на интервале (a, b). Если для любого числа $x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$, то функция F называется (точной) первообразной функции f на интервале (a, b).*

Например, функция $y = \sin x$ является первообразной функции $y = \cos x$ на всей вещественной оси, так как при любом $x \in \mathbb{R}$ $(\sin x)' = \cos x$.

Предложение 1. *Пусть функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f на интервале (a, b). Тогда существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что $F_1(x) - F_2(x) = C$ при любом $x \in (a, b)$.*

Доказательство. При любом $x \in (a, b)$ $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Тогда по первому следствию теоремы Лагранжа функция $F_1 - F_2$ постоянна на (a, b), то есть $F_1(x) - F_2(x) = C$ $\forall x \in (a, b)$ при некотором действительном C. $\square$

Таким образом, все функции, являющиеся первообразными для функции f, отличаются на константу.

Определение 2. *Произвольная первообразная функции f, определённой на некотором интервале, называется неопределённым интегралом функции f и обозначается $\int f(x)dx$.*

Так как все первообразные одной функции отличаются на константу, то, зная какую-то первообразную F функции f, мы можем записать равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$. Это равенство понимается так: произвольная первообразная функции f равна какой-то известной первообразной плюс некоторая постоянная.

Таблица интегралов

Зная таблицу производных (см. предыдущие лекции) и пользуясь определением первообразной, мы теперь можем записать таблицу неопределённых интегралов от некоторых элементарных функций.

$$1)\ \int Adx = Ax + C\ (A - -\text{произвольная константа});\ 2)\ \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1);$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0;\ 4)\ \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5)\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;\ 6)\ \int \sin x dx = -\cos x + C;\ 7)\ \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ 9)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$10)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C\ (|x| < |a|,\ a \neq 0);$$

$$11)\ \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C\ (a \neq 0);$$

$$12)\ \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;\ 13)\ \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$14)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}) + C\ (a \neq 0,\ x^2 + a \neq 0);$$

$$15)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C\ (a \neq 0,\ x \neq \pm a).$$

Отметим, что в пункте 2 при отрицательных α считается, что $x \neq 0$. Важно осознать, что *на каждом промежутке, на котором считается интеграл, добавляется своя константа интегрирования.* Например, для функции $f(x) = 1/x^3$ первообразная при $x > 0$ может быть $F(x) = -1/(2x^2) + 3$, а при $x < 0$, например, $F(x) = -1/(2x^2) + 10$.

Эти равенства верны на всех промежутках дифференцируемости выражений в правых частях. Доказательство всех равенств проводится по схеме:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Подынтегральное выражение $f(x)dx$ есть дифференциал любой первообразной для функции f. Так как $d(F(x) + C) = dF(x)$, то можем записать равенства $\int dF(x) = F(x) + C$, $d(\int f(x)dx) = dF(x) = f(x)dx$. Второе равенство означает, что у любой первообразной $\int f(x)dx$ один и тот же дифференциал. Кроме того, справедливо равенство $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Свойства неопределённого интеграла

1. Линейность. Если функции F и G дифференцируемы на интервале (a, b) и $F' = f$, а $G' = g$, то в силу линейности производной при всех вещественных α и β

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g.$$

Таким образом, функция $\alpha F + \beta G$ является первообразной для функции $\alpha f + \beta g$ на интервале (a, b), поэтому справедливо равенство $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$. С другой стороны, $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В силу их произвольности можем положить $\alpha C_1 + \beta C_2 = C$. Таким образом, доказано следующее *свойство линейности неопределённого интеграла:*

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C. \tag{1}$$

Свойство линейности позволяет вычислять некоторые интегралы.

Пример 1. *Часто применяются формулы сокращённого умножения:*

$$\int(3x^3 + 2x)^2dx = \int(9x^6 + 12x^4 + 4x^2)dx =$$
$$= 9\int x^6dx + 12\int x^4dx + 4\int x^2dx + C = \frac{9x^7}{7} + \frac{12x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + C.$$

2. Формула интегрирования по частям.

Предложение 2. *Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b). Пусть также на этом интервале существует первообразная функции $f'g$. Тогда на интервале (a, b) существует первообразная функции $g'f$ и справедлива* ***формула интегрирования по частям:***

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + C. \tag{2}$$

Доказательство. Из условия следует, что на (a, b) дифференцируема функция fg и по правилу Лейбница $(fg)' = f'g + g'f$. Используя существование первообразной для функции $f'g$ на интервале (a, b) и линейность неопределённого интеграла, можем записать равенства

$$\int f(x)g'(x)dx = \int((f(x)g(x))' - f'(x)g(x))dx + C =$$
$$= \int(f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx + C_1 = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C_2,$$

откуда следует и то, что на (a, b) существует первообразная функции $g'f$, и сама формула интегрирования по частям. □

Здесь важно понимать, что после второго и третьего равенств появляются новые произвольные постоянные, так как после второго равенства мы пользуемся линейностью, которая даёт ещё одну константу, добавляемую к C, а эту сумму констант мы обозначаем через C_1. После третьего равенства возникает ещё одна константа в силу определения неопределённого интеграла, сумму которой с C_1 мы и обозначаем через C_2. Так как все эти обозначения всё равно представляют собой произвольные постоянные, то в дальнейшем мы будем обозначать любую такую постоянную через C.

Так как $f'(x)dx = df$, $g'(x)dx = dg$, то формулу интегрирования по частям часто записывают в виде

$$\int f dg = fg - \int g df.$$

При вычислении интегралов с помощью формулы интегрирования по частям стремятся к тому, чтобы интеграл $\int g df$ был проще в плане вычисления, чем интеграл $\int f dg$. Этого можно добиться, если правильно обозначить часть подынтегрального выражения через f, а часть – через dg.

Пример 2. *1) В интеграле $\int \ln x dx$ положим $f(x) = \ln x$, а $dx = g'(x)dx$ ($\Rightarrow x = g(x)$). Тогда по формуле интегрирования по частям получим*

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx + C = x \ln x - x + C.$$

Можно теперь внести этот интеграл в список табличных интегралов.
2) В интеграле $\int xe^x dx$ положим $f(x) = x$, а $e^x dx = g'(x)dx$ ($\Rightarrow e^x = g(x)$). Тогда по формуле интегрирования по частям получим

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x (x)' dx + C = xe^x - e^x + C.$$

3. Формула замены переменной.

Предложение 3. *Пусть функция φ определена и дифференцируема на интервале (α, β) и при любом $t \in (\alpha, \beta)$ значение $\varphi(t)$ принадлежит интервалу (a, b), на котором определена функция f. Пусть также существует интеграл $\int f(x)dx$. Тогда существует интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ и верна* ***следующая формула замены переменной:***

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть F – любая первообразная функции f на интервале (a, b). По теореме о производной сложной функции $(F(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда получим цепочку равенств:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x)|_{x=\varphi(t)} + C = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} + C.$$

□

Некоторые интегралы вычисляются с помощью удачного выбора функции $x = \varphi(t)$.

Пример 3. *1) Пусть $F' = f$ на интервале (a, b). В интеграле $\int f(Ax+B)dx$, $A \neq 0$ сделаем замену $t = Ax + B$, откуда получим $dt = Adx$ и*

$$\int f(Ax+B)dx = \frac{1}{A}\int f(t)dt + C = \frac{1}{A}F(t) + C = \frac{1}{A}F(Ax+B) + C.$$

Теперь, используя этот пример, мы можем вычислять интегралы в тех случаях, когда под знаком подынтегральной функции стоит линейное выражение от x.
2) В интеграле $\int \sqrt{1-x^2}dx$ положим $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$. Из сделанной замены выразим t через $x : x = \arcsin t$ (поэтому $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ и $\cos t \geq 0$). Имеем цепочку равенств:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt + C = \int \cos^2 t dt + C = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C.$$

При вычислении интеграла от $\cos 2t$ мы воспользовались пунктом 1 этого примера. Можно теперь внести интеграл из пункта 2 в список табличных интегралов.

Формула замены переменной допускает некоторую модификацию, которая называется *подведение под знак дифференциала.* Идея состоит в том, что иногда подынтегральное выражение удаётся представить в виде $f(g(x))g'(x)dx$. Тогда, если функция F – первообразная функции f на некотором интервале, а значения функции g лежат на этом интервале, то по формуле замены переменной $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) + C = F(g(x)) + C$.

Пример 4. *1) Вычисляемый интеграл также можно внести в список табличных интегралов.*

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + C = \int \frac{1}{\cos x}(-\cos x)'dx + C = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x + C = -\ln|\cos x| + C.$$

2) Приведём пример двукратного подведения под знак дифференциала.

$$\int \frac{\cos(\sqrt{\ln x})}{2x\sqrt{\ln x}}dx = \int \frac{\cos(\sqrt{\ln x})}{2\sqrt{\ln x}}d(\ln x) + C = \int \cos(\sqrt{\ln x})d(\sqrt{\ln x}) + C = \sin(\sqrt{\ln x}) + C.$$

Отметим, что далеко не все первообразные являются элементарными функциями. Например, в элементарных функциях не выражаются следующие интегралы: **si** $x = \int \frac{\sin x}{x}dx$ **(интегральный синус), li** $x = \int \frac{dx}{\ln x}dx$ **(интегральный логарифм),** $\int \frac{e^x}{x}dx$ **(интегральная экспонента),** $\int e^{-x^2}dx$ **(интеграл Пуассона),** $\int \sin(x^2)dx$, $\int \cos(x^2)dx$ **(интегралы Френеля)**. Важно отметить, что первообразные подынтегральных функций существуют, но являются новыми функциями, которые не могут выражаться с помощью конечного числа арифметических операций или композиций через изученные в школе и в первом семестре элементарные функции. Тем не менее такие интегралы широко используются в науке и ещё встретятся в курсе анализа. Доказательство того, что интеграл не выражается в элементарных функциях, проводится с помощью критерия Лиувилля. Мы не приводим здесь формулировку, а лишь отметим, что в этом критерии утверждается, что функция имеет первообразную, выражаемую через элементарные функции, если и только если имеет (или приводится) к некоторому специальному виду. С помощью этого критерия доказывается, например, что интегральная экспонента неинтегрируема, а затем мы можем выразить через неё (пользуясь формулой Эйлера для комплексных чисел и линейностью) интегральный синус, который, таким образом, также окажется не представляется с помощью конечной композиции элементарных функций.

Интересны вопросы о классификации тех функций, для которых существуют первообразные, выраженные элементарными функциями. На следующей лекции мы изучим класс рациональных функций.