## Лекция 20

### Первообразные от рациональных функций

**Определение 1.** *Пусть $P$ и $Q$ – многочлены от вещественной переменной. Функция $f$, принимающая в любой точке $x \in \mathbb{R}$ (при этом $Q(x) \neq 0$) значение $f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$, называется рациональной.*

Мы увидим, что вычисление многих интегралов сводится к умению находить интегралы от рациональных функций, а интегралы от рациональных функций, как будет понятно из теорем ниже, найти всегда возможно. Продемонстрируем на примерах, как находить интегралы от рациональных функций.

**Пример 1.** *Рассмотрим интеграл из таблицы интегралов.*

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{1}{2}\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|x-1| + C_1 - \ln|x+1| + C_2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + C.$$

Мы видим, что подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ была разложена в сумму двух рациональных функций более простого вида, от которых уже стало возможно взять интеграл.

Оказывается,что любую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочленов и рациональных функций четырёх типов. Мы будем называть функции этих типов *элементарными дробями.* Сейчас мы докажем интегрируемость элементарных дробей каждого типа. Затем сформулируем (без доказательства) теоремы, из которых будет вытекать существование и единственность представления всякой рациональной функции в виде суммы многочленов и элементарных дробей.

К **перовому типу** относятся рациональные функции вида $\frac{A}{x-a},\ A,\ a \in \mathbb{R}$. Интеграл от функции такого типа легко вычисляется:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

**Второй тип** элементарных дробей состоит из функций вида

$$\frac{B}{(x-b)^k},\ B,\ b \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Интеграл снова вычисляется совсем просто:

$$\int \frac{Bdx}{(x-b)^k} = \frac{B}{(1-k)(x-b)^{k-1}} + C.$$

**Третий тип** элементарных дробей выглядит несколько сложнее:

$$\frac{D_1x + D_2}{x^2 + d_1x + d_2},\ D_1,\ D_2,\ d_1,\ d_2 \in \mathbb{R},$$

а многочлен $d(x) = x^2 + d_1x + d_2$ не имеет вещественных корней. Интеграл от функции третьего типа вычислим с помощью выделения полного квадрата. Сначала считаем, что

$D_1 \neq 0$.

$$\int \frac{D_1x + D_2}{x^2 + d_1x + d_2}dx = D_1 \int \frac{x + D_2/D_1}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}}dx =$$

$$= D_1 \int \frac{x + \frac{d_1}{2} - \frac{d_1}{2}}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}}dx + D_2 \int \frac{dx}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} =$$

$$= \frac{D_1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{d_1}{2}\right)^2}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} + \left(D_2 - \frac{D_1d_1}{2}\right) \int \frac{dx}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} =$$

$$= \frac{D_1}{2} \ln(x^2 + d_1x + d_2) + \frac{2D_2 - D_1d_1}{\sqrt{4d_2 - d_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + d_1}{\sqrt{4d_2 - d_1^2}} + C.$$

В случае $D_1 = 0$ интеграл вычисляется проще, так как нет слагаемого, в котором мы используем подведение под знак дифференциала, вследствие чего отсутствует логарифм.

Элементарные дроби **четвертого типа** имеют вид $\frac{E_1x+E_2}{(x^2+e_1x+e_2)^l}$, $E_1,\ E_2,\ e_1,\ e_2 \in \mathbb{R}$, $l$ – натуральное число, большее 1, и многочлен $d(x) = x^2 + e_1x + e_2$ не имеет вещественных корней. Для вычисления интегралов от них снова воспользуемся выделением полного квадрата, как и в третьем типе, а затем сделаем замены: $a^2 = e_2 - \frac{e_1^2}{4}$ и $x + \frac{e_1}{2} = t,\ dx = dt$. Получим равенство

$$\int \frac{E_1x + E_2}{(x^2 + e_1x + e_2)^l} = \int \frac{E_1t + \left(E_2 - \frac{E_1e_1}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^l} =$$

$$= \frac{E_1}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2 + a^2)^l} + \left(E_2 - \frac{E_1e_1}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l}.$$

Первое слагаемое вычисляется методом подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{2tdt}{(t^2 + a^2)^l} = \int \frac{dt^2}{(t^2 + a^2)^l} = \frac{1}{1 - l} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{l-1}} + C.$$

Теперь покажем, что интеграл во втором слагаемом выражается в элементарных функциях. Пусть $I_l = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l}$. Мы знаем, что $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$. Используем интегрирование по частям. Примем в $I_l$ за $f(t)$ выражение $\frac{1}{(t^2+a^2)^l}$, $g'(t)dt = dt$, тогда

$$I_l = \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} + 2l \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{l+1}}dt.$$

При этом

$$\int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{l+1}}dt = \int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{l+1}}dt = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l} - a^2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{l+1}} = I_l - a^2 I_{l+1}.$$

Подставим это выражение в равенство для $I_l : I_l = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2lI_l - 2la^2 I_{l+1}$, что равносильно

$$I_{l+1} = \frac{1}{2la^2} \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} + \frac{2l - 1}{2l \cdot a^2} I_l.$$

Теперь, полагая $l = 2$, выразим $I_2$ через $I_1$ и так далее. Таким образом, интеграл $I_l$ можно выразить в элементарных функциях для любого $l \in \mathbb{N}$. Подставляя в результат $t = \frac{2x+e_1}{2}$, получим полное доказательство того, что интеграл от элементарной дроби четвертого типа выражается в элементарных функциях.

Осталось лишь убедиться, что любая рациональная функция представляется в виде суммы многочленов и элементарных дробей. Из этого будет следовать, что любая рациональная функция интегрируема.

**Теорема 1.** *Любой многочлен с вещественными коэффициентами всегда можно разложить на произведение некоторой константы и множителей того же вида, что знаменатели элементарных дробей.*

Эту теорему мы не будем доказывать. Доказательство можно провести с помощью следствия *основной теоремы алгебры*, в которой утверждается, что любой многочлен степени $n$ с комплексными коэффициентами имеет $n$ корней в поле комплексных чисел. Так как у многочлена с вещественными коэффициентами корни либо вещественные, либо комплексно сопряжённые, причём эти комплексно сопряжённые корни имеют одинаковую кратность, то и получаются множители четырёх указанных типов. Для интересующихся отметим, что доказательство можно найти в первом томе книги В. А. Зорича.

Заметим, что необязательно в разложении многочлена присутствуют все четыре типа знаменателей. Например, многочлен $P_1(x) = x^2-1$ раскладывается только на знаменатели первого типа, так как $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$; однако бывают и другие ситуации:

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 = (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)^2 = ((x^2 + 1)^2 - x^2)^2 = (x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2,$$

то есть многочлен $P_2(x) = (x^4 + x^2 + 1)^2$ раскладывается только на множители четвёртого типа.

**Определение 2.** *Рациональная функция называется правильной дробью, если степень её числителя меньше степени знаменателя.*

**Теорема 2.** *Любая правильная дробь $P/Q$ (степень $P$ меньше степени $Q$) единственным образом раскладывается в сумму элементарных дробей. Если её знаменатель представляется в виде*

$$Q(x) = C(x-a_1)\cdot \ldots \cdot (x-a_n)\cdot (x-b_1)^{k_1}\cdot \ldots \cdot (x-b_m)^{k_m}\cdot (x^2+c_1x+d_1)\cdot \ldots \cdot (x^2+c_rx+d_r)\cdot$$
$$\cdot (x^2+e_1x+h_1)^{l_1}\cdot \ldots \cdot (x^2+e_px+h_p)^{l_p}$$

*(все квадратные трёхчлены не имеют вещественных корней, а числа $k_1$, ..., $k_m$, $l_1$, ..., $l_p$ натуральные и больше единицы), то разложение записывается в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{i=1}^{k_1}\frac{B_{1i}}{(x-b_1)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{k_m}\frac{B_{mi}}{(x-b_m)^i} + \sum_{i=1}^{r}\frac{C_ix+D_i}{x^2+c_ix+d_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l_1}\frac{E_{1i}x+H_{1i}}{(x^2+e_{1i}x+h_{1i})^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{l_p}\frac{E_{pi}x+H_{pi}}{(x^2+e_{pi}x+h_{pi})^i}.$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим, а интересующиеся могут посмотреть первый том книги В. А. Зорича и второй том книги Г. М. Фихтенгольца.

Теперь мы можем описать алгоритм, по которому производится разложение любой элементарной функции в сумму многочлена и элементарных дробей.

Если дробь неправильная, то есть степень числителя не меньше степени знаменателя, то сначала уголком делим числитель на знаменатель. После выполнения этих действий представим рациональную функцию в виде суммы частного и правильной дроби, в числителе которой стоит остаток от деления, а знаменатель совпадает со знаменателем исходной функции. Затем разбиваем знаменатель на множители (теорема 1) и с помощью метода неопределённых коэффициентов находим разложение рациональной функции в сумму элементарных дробей (теорема 2). При разложении знаменателя на множители можно использовать алгоритм Евклида для нахождения кратных корней (см. В. А. Зорич, “Математический анализ”, 1 том, с. 332 – с. 333). Приведём примеры.

**Пример 2.** *1) Вычислим интеграл* $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$*. Знаменатель уже разложен на множители нужного вида. Степень числителя меньше степени знаменателя, так что подынтегральная функция является правильной дробью. С помощью метода неопределённых коэффициентов найдём разложение подынтегральной функции в сумму простых дробей.*

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

*Приведём правую часть к общему знаменателю. В этом случае равенство дробей означает равенство их числителей:*

$$2x^2+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

*Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получим систему:*

$$\begin{cases} A+B=0 \ (\textit{при } x^4), \\ -2B+C=0 \ (\textit{при } x^3), \\ 2A+B-2C+D=2 \ (\textit{при } x^2), \\ -2B+C-2D+E=2 \ (\textit{при } x^1), \\ A-2C-2E=13 \ (\textit{при } x^0). \end{cases}$$

*Решая её (например, с помощью метода элементарных преобразований), найдём*

$$A=-B=1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

*Таким образом,*

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

*Каждое из слагаемых справа мы умеем интегрировать. В итоге получим*

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{x+2}{x^2+1}dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

*Отметим, что вместо метода неопределённых коэффициентов мы могли подставить в равенство числителей* $x=2$ *и найти* $A$*, а затем либо подставить мнимую единицу* $i$ *вместо* $x$ *и найти* $D$*, после чего уже отыскать* $C$ *и* $D$ *с помощью метода неопределённых коэффициентов, либо воспользоваться методом неопределённых коэффициентов сразу после нахождения* $A$*. Тогда системы уравнений были бы проще.*

***2) а)*** *Вычислим интеграл* $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$*. Сделаем замену* $t=\sqrt{x+1}$*, тогда* $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow dx = 2tdt$*. После такой замены наш интеграл примет вид* $\int 2\frac{t+2}{t^3-1}dt$*, то есть теперь это интеграл от рациональной функции. Тогда получим*

$$2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = 2\int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt = \int \frac{2}{t-1}dt - \int \frac{2t+2}{t^2+t+1}dt = \\ = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

*Подставляя* $t=\sqrt{x+1}$*, получаем ответ.*

*б) Аналогично, заменяя в интеграле* $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{1+\sqrt{x+1}}dx$ *выражение* $x+1$ *на* $t^6$, *получим интеграл* $6\int \frac{t^7+2t^5}{t^3+1}dt$. *Дробь под знаком последнего интеграла неправильная, поэтому, деля столбиком числитель на знаменатель, получим равенство*

$$6\int \frac{t^7+2t^5}{t^3+1}dt = 6\int (t^4+2t^2-t)dt + 6\int \frac{-2t^2+t}{t^3+1}dt.$$

*Вычисление первого слагаемого не составляет проблем, а вычисление второго проводится с помощью метода неопределённых коэффициентов, как и в пункте 1. Проведите вычисления до конца в качестве упражнения.*

*Вообще, рассмотрим рациональное выражение*

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

*где* $P$ *и* $Q$ *– многочлены от двух переменных. Интегралы вида*

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx,\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

*сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью замены* $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. *Отметим, что подынтегральная функция может содержать и выражения вида*

$$\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{m_1},\ \ldots,\ \left(\frac{\alpha x+\beta_k}{\gamma x+\delta}\right)^{m_k},$$

*где все показатели* $m_1, \ldots, m_k$ *рациональны. В этом случае эти показатели приводятся к общему знаменателю* $p$, *чтобы получилось выражение вида* $R\left(x,\ \sqrt[p]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$.

*Если рассматривается интеграл вида*

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

*то при* $a>0$ *мы можем получить интеграл от рациональной функции с помощью подстановки*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}x,$$

*а если* $c>0$, *то подходит подстановка*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}.$$

*Если уравнение* $ax^2+bx+c=0$ *имеет различные вещественные корни* $x_1$ *и* $x_2$, *то подынтегральная функция становится рациональной, если положить*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1).$$

*Эти подстановки называются* ***подстановками Эйлера.***

***3)*** *В пункте 2 мы увидели, как интегралы можно сводить к рациональным функциям. Очень часто это срабатывает, если под интегралом стоит дробь, зависящая от тригонометрических функций. Вообще, сведение рациональных выражений от радикалов, тригонометрических функций и т. д. называется рационализацией. Дроби от тригонометрических выражений могут быть рационализированы с помощью подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ -\pi<x<\pi$. *При этом* $\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

*Мы видим, что после такой замены любое рациональное выражение от тригонометрических функций станет рациональной функцией от переменной $t$. Такая подстановка называется* **универсальной тригонометрической подстановкой**.

*Отметим, что иногда бывает удобнее делать и другие замены в тригонометрических выражениях. Вычислим, например, интеграл* $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$. *Если положить* $t = \operatorname{tg} x$, *то, применяя метод неопределённых коэффициентов, получим*

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{t^2}{(1+t)(1+t^2)^2} dt = \int \left( \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4} \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \frac{t-1}{(t^2+1)^2} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \frac{1+t}{1+t^2} + C = \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C.$$

*Кроме того, некоторые интегралы от тригонометрических функций вычисляются с помощью уже известных методов интегрирования по частям и замены переменной, или же используя формулы тригонометрии. Например, с помощью формул*

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

*вычисляются интегралы вида*

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx.$$

*Интегралы вида* $\int \sin^{2n} x dx$ *и* $\int \cos^{2n} x dx$ *можно найти с помощью формул понижения степени*

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \ \text{ и } \ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

*Интеграл вида* $\int \sin^{2n+1} x dx$ *вычисляется следующим образом:*

$$\int \sin^{2n+1} x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^n d(\cos x) == - \int (1 - t^2)^n dt,$$

*где* $t = \cos x$. *Последний интеграл вычисляется с помощью бинома Ньютона. Интеграл* $\int \cos^{2n+1} x dx$ *считается аналогично. Некоторые примеры мы разберём на семинарах.*

О нахождении первообразных можно прочитать в книге Г. М. Фихтенгольца “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, том 2, глава 8. Материал изложен очень ясно, приводится много примеров, что, несомненно, будет полезно для читателей.