Лекция 21

Интеграл Римана

Мы начинаем изучение важного объекта математического анализа – определённого интеграла. Пусть функция f определена на интервале (α, β). Под определённым интегралом функции f на отрезке $[a, b]$, содержащемся в этом интервале, можно понимать число, равное площади криволинейной трапеции, заключенной между прямыми $y = 0,\ x = a,\ y = b$, и графиком функции $y = f(x)$. При этом площадь той части трапеции, которая находится над осью абсцисс, берут со знаком "+", а площадь части, которая ниже оси абсцисс – со знаком "−" (см. рис. 1).

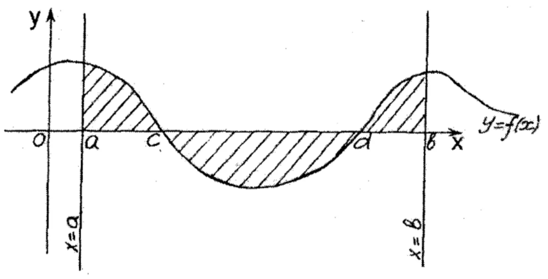

Рис. 1: Над (a, c) и (d, b) с плюсом, над (c, d) с минусом

Определённый интеграл обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, a – нижний предел интегрирования, а b – верхний предел интегрирования.

Конечно, приведённые выше факты никак не могут быть определением интеграла. Мы пока не знаем, что такое площадь, а этот вопрос требует подробного изучения, выходящего за рамки нашего курса. Позже, однако, мы немного коснёмся темы площади.

Кроме того, интерес вызывает вопрос о том, почему обозначение определённого интеграла почти такое, как и неопределённого, а также важно понять, какова связь между определённым и неопределённым интегралами. Эта связь будет ясна после доказательства формулы Ньютона – Лейбница. Сейчас только отметим, что при изучении определённого интеграла мы можем рассматривать этот интеграл при условии, что один предел интегрирования фиксирован, а второй меняется в пределах (α, β). Например, при фиксированном a мы будем для каждого $b \in (\alpha, \beta)$ получать своё значение интеграла (b может быть и меньше, чем a). Таким образом, сам интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ при изменении b является функцией F, зависящей от b и определённой на отрезке (α, β). Из теоремы Ньютона – Лейбница мы выведем, что если f непрерывна, то функция F является первообразной для функции f на интервале (α, β). Более того, $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, причём это равенство верно для любой первообразной из множества всех первообразных функции f. В этом и состоит связь между неопределённым и определённым интегралом. Надо сказать, что исторически символ интеграла "$\int$ " появился как раз для обозначения определённого интеграла. Это стилизованная буква S от начальной буквы латинского слова "Summa".

Перейдём к точным определениям.

Определение 1. *Конечный набор точек $T = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ $(n > 1)$ называется **разбиением** отрезка $[a, b]$, если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.*

Отрезок разбиения *– это отрезок вида $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.*

Величина $d(T) = \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta_k|$ *называется* ***диаметром разбиения*** T.

Пусть $\xi_k \in \Delta_k,\ k = 1,\ \dots,\ n$. *Совокупность точек* $\{x_0,\ \dots,\ x_n,\ \xi_1,\ \dots\ \xi_n\}$ *называется* ***размеченным разбиением*** *отрезка* $[a,b]$ *и обозначается* (T,ξ).

Множество точек $\{\xi_1,\ \dots,\ \xi_n\}$ *называется* ***разметкой*** *разбиения* (T,ξ).

Интегральной суммой *функции* f, *соответствующей размеченному разбиению* (T,ξ) *называется сумма* $\sigma(f,T,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|$.

Определение 2. *Число* I *называется определённым интегралом (Римана) от функции* f *на отрезке* $[a,b]$, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta > 0$, *что для любого размеченного разбиения* (T,ξ) *отрезка* $[a,b]$ *с диаметром* $d(T) < \delta$ *выполнено неравенство* $|I - \sigma(f,T,\xi)| < \varepsilon$. *Число* I *обозначается символом* $\int\limits_a^b f(x)dx$. *Функция* f, *для которой существует определённый интеграл на отрезке* $[a,b]$, *называется интегрируемой по Риману на* $[a,b]$. *Класс функций, интегрируемых по Риману на отрезке* $[a,b]$ *обозначается* $R[a,b]$. *Таким образом, тот факт, что функция* f *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *можно записать в виде* $f \in R[a,b]$.

Геометрическую интерпретацию всех объектов из определений 1 и 2 см. на рис. 2.

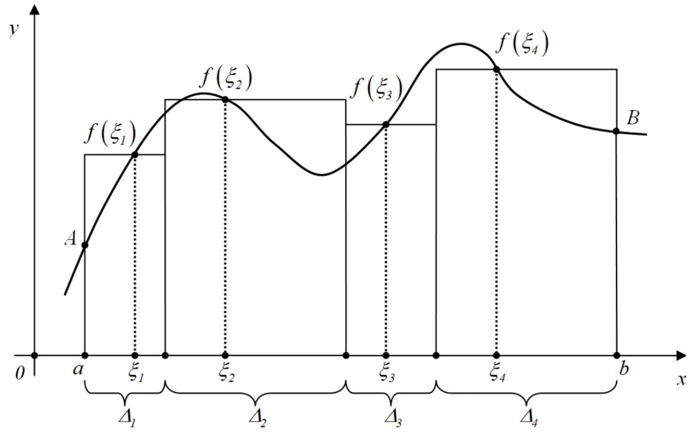

Рис. 2: Иллюстрация для $n = 4$

Вычисление определённых интегралов по определению или с помощью метода интегральных сумм – задача зачастую непростая, однако приведём несколько примеров, где такое вычисление провести несложно. При этом мы будем пользоваться некоторыми фактами, которые пока не доказаны. Именно, мы будем использовать тот факт, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке. В свою очередь, из интегрируемости функции на отрезке уже следует, что можно выбирать любое разбиение и любую разметку, так как предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю один и тот же. Таким образом, мы будем подбирать наиболее удобное для нас разбиение и наиболее удобную разметку. Такой метод интегрирования называется **методом интегральных сумм.**

Пример 1. *1) Пусть функция* f *принимает значение* c *для любой точки* $x \in [a,b]$. *Тогда для любой интегральной суммы функции* f *на этом отрезке будем иметь*

$$\sigma(f,T,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| = c\sum_{k=1}^{n} |\Delta_k| = c(b-a).$$

Таким образом, $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$.

2) Рассмотрим функцию $y = x$ *на отрезке* $[0,1]$. *Эта функция непрерывна на отрезке* $[0,1]$, *а значит, и интегрируема на нём. Разобьём отрезок* $[0,1]$ *на* n *одинаковых отрезков. Тогда длина каждого отрезка будет равна* $1/n$. *Соответствующее разбиение* T *состоит из точек* $x_0 = 0,\ x_1 = 1/n,\ x_2 = 2/n,\ \ldots,\ x_n = n/n = 1$. *В качестве точек разметки выберем правые концы отрезков разбиения, т. е.* $\xi_1 = 1/n,\ \xi_2 = 2/n,\ \ldots,\ \xi_n = 1$. *Тогда для соответствующей интегральной суммы имеем*

$$\sigma(f,T,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{1}{2},\ n\to+\infty.$$

Здесь n *стремится к бесконечности, так как при вычислении интеграла мы устремляем диаметр разбиения к нулю, а в нашем случае* $d(T) = 1/n$. *Таким образом,* $\int\limits_0^1 x dx = 1/2$.

3) Рассмотрим функцию $y = x^2$ *на отрезке* $[0,1]$. *Эта функция непрерывна на отрезке* $[0,1]$, *а значит, и интегрируема на нём. Разобьём отрезок* $[0,1]$ *на* n *одинаковых отрезков. Далее рассуждаем также, как в пункте 2. Для интегральной суммы получим:*

$$\sigma(f,T,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3},\ n\to+\infty.$$

Здесь снова n *стремится к бесконечности, так как при вычислении интеграла мы устремляем диаметр разбиения к нулю. Таким образом,* $\int\limits_0^1 x^2 dx = 1/3$.

Предложение 1. *Функция* f, *интегрируемая по Риману на отрезке* $[a,b]$, *ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть f не ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ существует такой отрезок разбиения $\Delta_r = [x_{r-1}, x_r]$, что на нём f не ограничена. Точки разметки $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_{r-1},\ \xi_{r+1},\ \ldots,\ \xi_n$ (то есть точки разметки всех отрезков, кроме Δ_r) выберем и зафиксируем. Положим

$$A = \left|\sum_{k=1,\ k\neq r}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|\right|.$$

Для любого числа $M > 0$ можно выбрать точку $\xi_r \in \Delta_r$, для которой $|f(\xi_r)| > \frac{M+A}{|\Delta_r|}$. Тогда

$$|\sigma(f,T,\xi)| = \left|\sum_{k=1,\ k\neq r}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| + f(\xi_r)|\Delta_r|\right| > \frac{M+A}{|\Delta_r|}|\Delta_r| - A = M.$$

Таким образом, интегральная сумма функции f не ограничена, поэтому f не интегрируема. Противоречие. □

При этом возникает вопрос, верно ли обратное утверждение. Отрицательный ответ на этот вопрос даётся следующим примером.

Пример 2. *Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке* $[a,b]$: $D(x) = \begin{cases} 1,\ x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}; \\ 0,\ x\in[a,b]\backslash Q. \end{cases}$
Для отрезков любого разбиения можно брать разметку, состоящую только из рациональных чисел (тогда соответствующая интегральная сумма буде равна $b-a$*) или только из иррациональных чисел (тогда интегральная сумма будет равна 0). Таким образом,*

не существует числа, в ε- окрестности которого будут лежать все интегральные суммы с достаточно малым диаметром разбиения. Это означает, что функция Дирихле не интегрируема по Риману ни на каком отрезке, хотя и является ограниченной.

Упражнение. В условиях примера 2 для любого числа $p \in [0, b-a]$ постройте такое размеченное разбиение (T, ξ), что интегральная сумма $\sigma(D, T, \xi) = p$.