Лекция 22

Критерий Дарбу интегрируемости функции Риману

Мы переходим к изучению необходимых и достаточных условий интегрируемости функции по Риману. Будут использоваться обозначения предыдущих лекций.

Определение 1. ***Верхней суммой Дарбу*** *функции f на отрезке $[a,b]$, соответствующей разбиению T этого отрезка, называется сумма вида*

$$S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k|\Delta_k|,\ \text{где } M_k=\sup_{x\in\Delta_k} f(x).$$

Нижней суммой Дарбу *функции f на отрезке $[a,b]$, соответствующей разбиению T этого отрезка, называется сумма вида*

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k|\Delta_k|,\ \text{где } m_k=\inf_{x\in\Delta_k} f(x).$$

Отметим, что для непрерывных на отрезке функций верхние суммы Дарбу соответствуют интегральным суммам с такими размеченными разбиениями, что в качестве точек разметки выбираются точки максимумов функции на отрезках разбиений. С нижними суммами Дарбу всё аналогично, только в разметку входят точки минимумов. Существование таких точек следует из второй теоремы Вейерштрасса. Однако существуют интегрируемые на отрезках функции, не являющиеся непрерывными, а для таких функций суммы Дарбу не всегда совпадают с интегральными суммами. В качестве **упражнения** читатели могут построить пример функции и такой суммы Дарбу для неё, что эта сумма не совпадает ни с какой интегральной суммой с тем же разбиением, что и у самой суммы Дарбу. На рисунке ниже представлены суммы Дарбу.

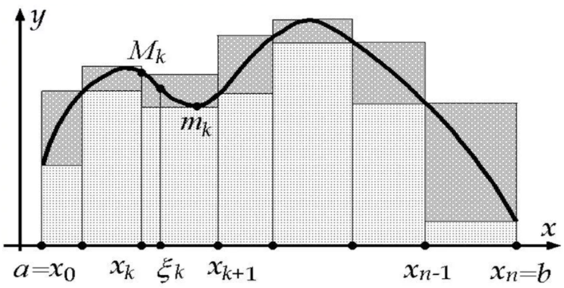

Рис. 1: Верхняя и нижняя суммы Дарбу

Определение 2. *Число $\overline{I}=\inf\limits_T S(T)$ называется верхним интегралом функции f на отрезке $[a,b]$, а число $\underline{I}=\sup\limits_T s(T)$ – её нижним интегралом на этом отрезке. Здесь точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всем возможным разбиениям отрезка $[a,b]$.*

В следующем предложении мы докажем основные свойства сумм Дарбу.

Предложение 1. *1) Для любого разбиения T, его разметки ξ и соответствующей им интегральной суммы $\sigma(f,T,\xi)$ выполнены неравенства $s(T)\le\sigma(f,T,\xi)\le S(T)$;*
2) для фиксированного разбиения T имеем $s(T)=\inf\limits_\xi\sigma(f,T,\xi)$, а $S(T)=\sup\limits_\xi\sigma(f,T,\xi)$;
3) для любых разбиений T_1 и T_2 имеем $s(T_1)\le S(T_2)$;
4) для ограниченной функции f существуют $\underline{I}$ и $\overline{I}$ и для любого разбиения T выполнены неравенства $s(T)\le\underline{I}\le\overline{I}\le S(T)$;
5) для любого разбиения T имеем $\Omega(T):=S(T)-s(T)\ge\overline{I}-\underline{I}$.

Доказательство. **1)** При всех $\xi_k \in \xi$ справедливы неравенства (в обозначениях определения 1):

$$m_k|\Delta_k| \le f(\xi_k)|\Delta_k| \le M_k|\Delta_k|.$$

Суммируя по всем k от 1 до n, получаем доказательство пункта 1.
2) Докажем, что нижняя сумма Дарбу – это инфимум интегральных сумм. То, что $s(T)$ является нижней гранью для $\sigma(f, T, \xi)$, следует из пункта 1. С другой стороны, по определению точной нижней грани для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\xi_k \in \Delta_k$, что $f(\xi_k) < m_k + \varepsilon$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} m_k|\Delta_k| \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| < \sum_{k=1}^{n}(m_k + \varepsilon)|\Delta_k| = s(T) + \varepsilon(b-a),$$

то есть

$$s(T) \le \sigma(f, T, \xi) < s(T) + \varepsilon(b-a).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то по второму определению инфимума и супремума получаем, что $s(T) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$. Равенство $S(T) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$ доказывается таким же образом.
3) Заметим, что если добавить к любому разбиению новые точки, то верхняя сумма Дарбу либо не изменится, либо уменьшится, а нижняя – либо не изменится, либо увеличится (сделайте рисунок). Пусть $T_3 = T_1 \cup T_2$. Тогда, в силу сделанного замечания и определения сумм Дарбу, $s(T_1) \le s(T_3) \le S(T_3) \le S(T_2)$.
4) Так как функция f ограничена, то для любого разбиения T отрезка $[a, b]$, существует точная верхняя и точная нижняя грань значений функции f на каждом из отрезков разбиения T, поэтому определены $s(T)$ и $S(T)$.

В силу свойства 3 множество значений всех нижних сумм Дарбу D_1 ограничено сверху элементами множества значений всех верхних сумм Дарбу D_2, а D_2 ограничено снизу элементами D_1, поэтому у множества D_1 существует точная верхняя грань, которая по определению 2 равна $\underline{I}$, а у множества D_2 – точная нижняя грань, в силу определения 2 равная $\overline{I}$. При этом по по определению точной верхней грани $\underline{I}$ не больше любого элемента множества D_2, поэтому $\underline{I} \le \overline{I}$. Тогда $s(T) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S(T)$.
5) $\Omega(T) := S(T) - s(T) \ge \overline{I} - s(T) \ge \overline{I} - \underline{I}$. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать критерий интегрируемости функции по Риману.

Теорема 1. ***(Критерий интегрируемости)*** *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall T : d(T) < \delta\ S(T) - s(T) < \varepsilon$$

(короче это условие записывается в виде: $\lim\limits_{d(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$).

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f интегрируема. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого размеченного разбиения (T, ξ) отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(T) < \delta$ существует такое число I, что

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon.$$

Возьмём любое разбиение T_1 с разметкой ξ_1 и диаметром $d(T_1) < \delta$. Тогда по свойству 2 предложения 1 имеем $s(T_1) = \inf\limits_{\xi_1} \sigma(f, T_1, \xi_1)$, а $S(T_1) = \sup\limits_{\xi_1} \sigma(f, T_1, \xi_1)$, откуда получим

$$I - \varepsilon \le s(T_1) \le I + \varepsilon \text{ и } I - \varepsilon \le S(T_1) \le I + \varepsilon.$$

Таким образом, числа $s(T_1)$ и $S(T_1)$ принадлежат отрезку $[I-\varepsilon, I+\varepsilon]$, откуда получаем $|S(T_1)-s(T_1)| \le 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и разбиения T_1 с диаметром $d(T_1) < \delta$, получаем доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{d(T)\to 0}(S(T)-s(T)) = 0$. Нужно доказать, что существует предел $\lim\limits_{d(T)\to 0}\sigma(f,T,\xi)$. Прежде всего убедимся, что $\underline{I} = \overline{I}$. Действительно, в силу пункта 5 предложения 1 для любого разбиения T

$$\Omega(T) := S(T) - s(T) \ge \overline{I} - \underline{I} \ge 0,$$

а так как $S(T)-s(T)$ стремится к 0, то $\underline{I} = \overline{I}$. Обозначим это общее значение через I и докажем, что $\lim\limits_{d(T)\to 0}\sigma(f,T,\xi) = I$. В силу существования предела $S(T)-s(T)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения T с диаметром, меньшим δ, выполнено неравенство $S(T)-s(T) < \varepsilon$. В силу предложения 1 любая интегральная сумма $\sigma(f,T,\xi)$ лежит на отрезке $[s(T), S(T)]$. В силу определения верхнего и нижнего интегралов на этом же отрезке лежит число I. При этом длина отрезка $[s(T), S(T)]$ меньше ε, поэтому при $d(T)\to 0$ $\sigma(f,T,\xi)\to I$. $\square$

Отметим, что $\Omega(T) := S(T)-s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)|\Delta_k|$. Величину $\omega_k := M_k - m_k$ назовём *колебанием функции* f на отрезке $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$. Таким образом, $\Omega(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k|\Delta_k|$.

Теперь мы можем сформулировать следствие теоремы 1.

Теорема 2. ***(Критерий интегрируемости в терминах колебаний)*** *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{d(T)\to 0}\Omega(T) = 0$.*

Эта теорема очень полезна при доказательстве интегрируемости.

Рассмотрим более внимательно критерий интегрируемости функции в терминах колебаний. Прежде всего отметим, что *колебанием функции f на множестве A* называется величина

$$\omega(f,A) = \sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)| = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x).$$

Колебанием функции f в точке a назовем величину

$$\omega(a) = \inf_{\delta>0}\sup_{x,y\in U_\delta(a)}(f(x)-f(y)) = \inf_{\delta>0}\Big(\sup_{x\in U_\delta(a)} f(x) - \inf_{x\in U_\delta(a)} f(x)\Big),$$

где $U_\delta(a)$ – $\delta-$окрестность точки a.

Упражнение 1. Докажите, что $f \in C(a) \Leftrightarrow \omega(a) = 0$.

В критерии интегрируемости по Риману мы рассматривали сумму

$$\Omega(T) := S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)|\Delta_k|.$$

Величина $\omega_k := M_k - m_k$ является колебанием функции f на отрезке $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$. Таким образом,

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n}\omega_k|\Delta_k| = \sum_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta_k)|\Delta_k|.$$

Согласно критерию интегрируемости, $f \in R[a,b]$ в том и только в том случае, когда при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при любом разбиении T с диаметром, меньшим δ, выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k| < \varepsilon$.

Если функция f ограниченна, то сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)|\Delta_k|$ будет достаточно малой, если у функции "не очень много" точек, в которых колебание не равно нулю, так как тогда в силу ограниченности f эти колебания представляют собой ограниченное множество чисел, а эти числа умножаются на длины отрезков, меньшие достаточно малого числа $\delta > 0$, так что общая сумма может быть сделана сколь угодно малой с помощью выбора δ. Слова "не очень много" имеют точный математический смысл, но нужно понимать, что при уменьшении диаметра разбиения количество слагаемых в Ω-сумме увеличивается, поэтому в случае интегрируемости суммарная длина тех отрезков, которые содержат точки с ненулевыми колебаниями (то есть, согласно упражнению 1, точки разрыва) должна становиться сколь угодно малой при уменьшении длин отрезков. Таким образом, важно, чтобы сумма длин отрезков, *покрывающих* точки, в которых колебания не равны нулю, должна уменьшаться при уменьшении диаметра разбиения.

Для того, чтобы формализовать записанные выше наблюдения потребуются, дополнительные понятия из теории меры. Если формализовать всё сказанное (то есть ввести соответствующие определения и сформулировать необходимые утверждения), то придём к критерию Лебега интегрируемости функции по Риману (подробнее см., например, учебник В. А. Зорича).

Упражнение. Доказать, что *функция Римана*

$$R(x) = \begin{cases} 1/n, \text{если } x = m/n \ (m \text{ и } n \text{ взаимно просты}), \\ 0, \ \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Сформулируем теперь теорему об эквивалентности трёх условий интегрируемости функции по Риману.

Теорема 3. ***(Три условия интегрируемости).*** *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из трёх эквивалентных условий:*
1) $\lim\limits_{d(T)\to 0} \Omega(T) = 0$;
2) $\underline{I} = \overline{I}$;
3) $\inf\limits_{T}(S(T) - s(T)) = 0.$

(Факультативный материал)

Доказательство. Для доказательства достаточно установить следующие импликации:

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1).$$

1. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) была получена при доказательстве достаточности теоремы 1.

2. Для доказательства импликации 2) $\Rightarrow$ 3) покажем, что

$$\inf_{T}(S(T) - s(T)) = \overline{I} - \underline{I}.$$

Неравенство $S(T) - s(T) \geq \overline{I} - \underline{I}$ – это свойство 5 сумм Дарбу, то есть разность между верхним и нижним интегралами является нижней гранью для множества разностей верхней и нижней сумм Дарбу.

С другой стороны, так как $\sup\limits_T s(T) = \underline{I}$, а $\inf\limits_T S(T) = \overline{I}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T_1, что $s(T_1) > \underline{I} - \varepsilon$ и такое разбиение T_2, что $S(T_2) < \overline{I} + \varepsilon$. Тогда для разбиения $T_3 = T_1 \cup T_2$ будем иметь неравенства

$$\underline{I} - \varepsilon < s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2) < \overline{I} + \varepsilon,$$

откуда

$$\overline{I} - \underline{I} + 2\varepsilon = \overline{I} + \varepsilon - (\underline{I} - \varepsilon) > S(T_3) - (\underline{I} - \varepsilon) > S(T_3) - s(T_3),$$

то есть $\overline{I} - \underline{I} \leq S(T_3) - s(T_3) < \overline{I} - \underline{I} + 2\varepsilon$, что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и означает, что

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = \overline{I} - \underline{I}.$$

Так как мы доказываем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3), а в пункте 2 дано, что $\overline{I} = \underline{I}$, то

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = 0.$$

3. Докажем импликацию 3) $\Rightarrow$ 1). Теперь по условию нам дано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение T_1, что $\Omega(T_1) := S(T_1) - s(T_1) < \varepsilon$. Нужно доказать, существование такого $\delta > 0$, что для всех разбиений T с диаметрами $d(T) < \delta$ разность сумм Дарбу $\Omega(T)$ меньше по крайней мере произведения какой-то положительной константы и ε.

Пусть диаметр разбиения T меньше δ, числовое значение которого подберём после проведения оценок. Рассмотрим разбиение $T_2 = T_1 \cup T$. Тогда

$$\Omega(T_2) \leq \Omega(T_1) < \varepsilon \text{ и } \Omega(T_2) \leq \Omega(T),$$

откуда

$$\Omega(T) = \Omega(T_2) + (\Omega(T) - \Omega(T_2)) < \varepsilon + \Omega(T) - \Omega(T_2)$$

и для оценки сверху величины $\Omega(T)$ достаточно оценить разность $\Omega(T) - \Omega(T_2)$. Разбиение T_2 образовано добавлением к точкам разбиения T точек разбиения T_1, то есть на некоторых отрезках разбиения T появляются точки разбиения T_1. Рассмотрим только такие отрезки. Если n – это количество точек разбиения T_1, то таких отрезков не больше, чем $n+1$ (так как точки разбиения T_1 могут попасть на концы отрезков разбиения T). Так как функция f по условию ограничена, то существует такое число $M > 0$, что при всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq M$, поэтому на каждом рассматриваемом отрезке разность между $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ не превосходит $2M$. При этом длина каждого такого отрезка меньше δ. Для остальных отрезков слагаемые в $\Omega(T)$ и $\Omega(T_2)$ совпадают, поэтому

$$\Omega(T) - \Omega(T_2) < 2 \cdot 2M(n+1)\delta = 4M(n+1)\delta.$$

Таким образом при $\delta = \frac{\varepsilon}{4M(n+1)}$ получим оценку

$$\Omega(T) < \varepsilon + 4M(n+1) \cdot \frac{\varepsilon}{4M(n+1)} = 2\varepsilon.$$

Итак, доказано, что при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \frac{\varepsilon}{4M(n+1)}$, при котором для любого разбиения T с диаметром $d(T) < \delta$ выполнено неравенство $\Omega(T) < 2\varepsilon$, то есть

$$\lim_{d(T) \to 0} \Omega(T) = 0.$$

□

(Конец факультативного материала).

Таким образом, из теоремы следует, что **ограниченная на $[a,b]$ функция f интегрируема, тогда и только тогда, когда $\inf\limits_T(S(T)-s(T))=0$.** Это утверждение мы будем называть ***инфимум-критерием.*** Его преимущество перед критерием интегрируемости (теорема 1) состоит в том, что нам не требуется проверять сразу для *всех* разбиений достаточно малого диаметра, что разности верхней и нижней сумм Дарбу от них меньше заданного $\varepsilon>0$, а важно подобрать для этого ε *одно какое-нибудь разбиение T,* для которого $S(T)-s(T)<\varepsilon$. В теоремах, которые мы будем изучать дальше, доказательство иногда будет строиться как раз на том, чтобы предъявить *хотя бы одно подходящее разбиение.*

Важно отметить, что вовсе необязательно рассматривать любые разбиения отрезка. Можно ограничиться лишь некоторыми простыми разбиениями, такими, чтобы при выполнении для этих разбиений некоторых условий функция оказывалась бы интегрируемой.

Пусть T_n – разбиение отрезка $[a,b]$ на n равных частей, S_n и s_n – верхняя и нижняя суммы Дарбу, соответствующие этому разбиению (естественно, функция f задана на $[a,b]$). Тогда справедлив следующий критерий интегрируемости.

Теорема 4. ***(Критерий в терминах равномерных разбиений).*** *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0$.*

Доказательство. Необходимость. Так как $d(T_n)=(b-a)/n$, то $d(T_n)\to 0 \Leftrightarrow n\to\infty$, поэтому необходимость прямо следует из теоремы 1.

Достаточность. В силу определения $\underline{I}$ и $\overline{I}$ для любого разбиения T выполнено

$$S(T)-s(T)\geq \overline{I}-\underline{I}\geq 0,$$

откуда следует $S_n-s_n\geq\overline{I}-\underline{I}\geq 0$, поэтому, в силу того, что S_n-s_n стремится к нулю, получаем равенство $\overline{I}=\underline{I}$, то есть выполнено условие 2 теоремы 3. $\square$