Лекция 23

Свойства определённого интеграла

Предложение 1. ***1) Линейность интеграла.*** *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2) Неотрицательность интеграла. *Пусть f интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Если при этом f также непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$ и $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$.*

3) Равенство нулю интеграла от неотрицательной функции. *Пусть f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Пусть также $\int_a^b f(x)dx = 0$. Тогда функция $f(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$.*

4) Неравенство для интегралов. *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и при всех $x \in [a, b]$ $f(x) \geq g(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. В частности, если $m \leq f(x) \leq M$ при всех $x \in [a, b]$, то $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.*

5) Интегрируемость модуля. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $|f|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и справедливо неравенство*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

6) Интегрируемость квадрата интегрируемой функции. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f^2 интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

7) Интегрируемость произведения интегрируемых функций. *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $f \cdot g$ также интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. **1)** В терминах пределов доказательство получается просто. Для интегральных сумм, соответствующих размеченному разбиению (T, ξ) отрезка $[a, b]$, выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))|\Delta_k| = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|\Delta_k|.$$

При $d(T) \to 0$ в правой части равенства получим $\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$. Это значит, что существует и предел в левой части, то есть функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и равенство $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ справедливо.

Факультативный материал. Распишем через “$\varepsilon - \delta$”.

Для интегральных сумм, соответствующих размеченному разбиению (T, ξ) отрезка $[a, b]$, выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))|\Delta_k| = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|\Delta_k|.$$

В силу критерия интегрируемости при заданном $\varepsilon > 0$ существует разбиение T с диаметром $d(T) < \delta$, для которого

$$\left|\alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| - \alpha \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon \text{ и } \left|\beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|\Delta_k| - \beta \int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))|\Delta_k| - \left(\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| - \alpha \int_a^b f(x)dx\right| + \left|\beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|\Delta_k| - \beta \int_a^b g(x)dx\right| < 2\varepsilon.$$

Это значит, что по критерию интегрируемости функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и равенство $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ справедливо в силу определения интеграла Римана. **Конец факультативного материала.**

2) Снова докажем с помощью пределов. В силу неотрицательности функции f все интегральные суммы $\sigma(f, T, \xi)$ также неотрицательны, а тогда неотрицателен и предел этих интегральных сумм при $d(T) \to 0$.

В силу локальных свойств непрерывных функций существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in U_\delta(x_0) \cap [a, b]$ $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. Тогда для любого размеченного разбиения (T, ξ) с диаметром $d(T) < \frac{\delta}{2}$ найдутся такие отрезки этого разбиения, которые содержатся в окрестности $U_\delta(x_0) \cap [a, b]$. При этом сумма длин этих отрезков не меньше δ. Тогда соответствующие интегральные суммы (а значит и предел всех интегральных сумм) будут больше, чем $\frac{\delta f(x_0)}{2}$, то есть строго больше 0.

Факультативный материал. Распишем через "$\varepsilon - \delta$".

В силу неотрицательности функции f все интегральные суммы $\sigma(f, T, \xi)$ также неотрицательны. Если предположить, что $I = \int_a^b f(x)dx < 0$, то при $\varepsilon = \frac{|I|}{2}$ найдётся разбиение T_1, для которого

$$I - \frac{|I|}{2} < \sigma(f, T_1, \xi) < I + \frac{|I|}{2} < 0,$$

то есть получаем противоречие.

В силу локальных свойств непрерывных функций существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in U_\delta(x_0) \cap [a, b]$ $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. Тогда для любого размеченного разбиения (T, ξ) с диаметром $d(T) < \frac{\delta}{2}$ найдутся такие отрезки этого разбиения, которые содержатся в окрестности $U_\delta(x_0) \cap [a, b]$. При этом сумма длин этих отрезков не меньше δ. Тогда соответствующие интегральные суммы будут больше, чем $\frac{\delta f(x_0)}{2}$, то есть строго больше 0. Если $I = \int_a^b f(x)dx < \frac{\delta f(x_0)}{2}$, то при $\varepsilon = \frac{\frac{\delta f(x_0)}{2} - I}{2}$ можно подобрать такое разбиение T_2, что

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T_1, \xi) < I + \varepsilon < \frac{\delta f(x_0)}{2},$$

то есть снова приходим к противоречию. **Конец факультативного материала.**

3) Ниже будет доказано, что все непрерывные на отрезке функции интегрируемы на этом отрезке, поэтому требование интегрируемости в условии мы не выписываем. Докажем пункт 3 от противного: если бы функция f не равнялась тождественно нулю на отрезке $[a,b]$, то нашлась бы такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $f(x_0) > 0$, а тогда по пункту 2 выполнялось бы неравенство $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$, что противоречит условию.

4) Пусть $p := f - g$. Тогда $p(x) \geq 0$ при всех $x \in [a,b]$, поэтому в силу пунктов 1 и 2

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b (g(x) + p(x))dx = \int\limits_a^b g(x)dx + \int\limits_a^b p(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Вторая часть утверждения получается, если в качестве одной из функций выбрать константу m или константу M.

5) Из неравенства треугольника следует, что при всех $x,\ y \in [a,b]$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \geq |f(x)| - |f(y)|$, откуда получаем, что при любом разбиении T отрезка $[a,b]$

$$\sup_{x,\, y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| \geq \sup_{x,\, y \in \Delta_k} (|f(x)| - |f(y)|).$$

Тогда $\omega_k(f) \geq \omega_k(|f|)$, а значит $\Omega_f(T) \geq \Omega_{|f|}(T)$, где $\omega_k(f)$ – это колебание функции f на k-м отрезке разбиения Δ_k, а $\Omega_f(T)$ – это Ω-сумма, соответствующая функции f. Для функции $|f|$ обозначения аналогичны. В силу интегрируемости функции f и критерия интегрируемости в терминах колебаний, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать такое $\delta > 0$, что при $d(T) < \delta$ будут выполнены неравенства $\varepsilon > \Omega_f(T) \geq \Omega_{|f|}(T)$. При этом $\Omega_{|f|}(T) \geq 0$, поэтому функция $|f|$ интегрируема на $[a,b]$ по критерию интегрируемости.

Из очевидных неравенств $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, справедливых для всех $x \in [a,b]$, и пункта 4 следует, что

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \Leftrightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

6) Пусть $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Тогда при всех $x,\ y \in [a,b]$

$$|f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) - f(y)| \cdot |f(x) + f(y)| \leq 2M|f(x) - f(y)|.$$

Отсюда следует, что при любом разбиении T отрезка $[a,b]$ для колебаний функций f^2 и f на любом отрезке разбиения Δ_k выполнено неравенство $\omega_k(f^2) \leq 2M\omega_k(f)$. Тогда $\Omega_{f^2}(T) \leq 2M\Omega_f(T)$, откуда, как и в случае модуля, получаем интегрируемость функции f^2 на отрезке $[a,b]$ по критерию интегрируемости в терминах колебаний.

7) Из свойства 1 следует, что функции $f + g$ и $f - g$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, а тогда в силу условия 6 функции $(f+g)^2$ и $(f-g)^2$ также интегрируемы, поэтому, снова по свойству 1, функция

$$f \cdot g = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

интегрируема. □

Отметим, что интегрируемость произведения интегрируемых функций f и g легко следует из критерия Лебега, так как во всех точках, в которых функции f и g непрерывны, непрерывно в силу свойств непрерывных функций и их произведение, поэтому множество точек разрыва произведения содержится в объединении множеств точек разрыва f и g или совпадает с этим объединением, то есть является множеством лебеговой меры ноль, откуда следует интегрируемость произведения.

Пример 1. *1) Свойство 4 позволяет проводить оценки для интегралов. Пусть, например,* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0. \end{cases}$ *Тогда можно проверить, что f убывает на отрезке* $[0,1]$, *поэтому* $\sin 1 \leq f(x) \leq 1 \ \forall \ x \in [0,1]$. *Поэтому, в силу свойства 4,* $\sin 1 \leq \int\limits_0^1 f(x)dx \leq 1$.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{Q} \cup [0,1], \\ -1, \ x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cup [0,1]. \end{cases}$ *Тогда f^2 интегрируема на отрезке* $[0,1]$, *а сама f – нет (отсутствие интегрируемости доказывается в точности так же, как для функции Дирихле). Этот пример показывает, что свойство 6 необратимо, то есть из интегрируемости f^2 не следует интегрируемость f.*

Интегрируемость композиции и аддитивность интеграла Римана

Выше были доказаны интегрируемость модуля и квадрата интегрируемой функции. Оба этих свойства являются частными случаями теоремы об интегрируемости композиции, которую мы сейчас сформулируем.

Теорема 1. ***(Теорема об интегрируемости композиции).*** *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Пусть функция g непрерывна на отрезке $[m,M]$. Тогда сложная функция $g \circ f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

Так как функции $g(x) = x^2$ и $g(x) = |x|$ непрерывны на всей оси, то интегрируемость квадрата и модуля интегрируемой функции теперь следует из теоремы 1.

Теорема 2. ***(Аддитивность интеграла Римана). 1)*** *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для любой точки $c \in [a,b]$ функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$.*

2) *Обратно, если f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$.*

Для каждого из пунктов выполнено равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. **1)** В силу интегрируемости f для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[a,b]$, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Если к разбиению T добавить точку c, то есть рассмотреть новое разбиение $T_0 = T \cup \{c\}$, то омега-сумма может только уменьшиться, то есть $\Omega(T_0) \leq \Omega(T) < \varepsilon$. Разбиение T_0 можно рассматривать как объединение разбиений T_1 отрезка $[a,c]$ и T_2 отрезка $[c,b]$, откуда

$$\Omega(T_1) + \Omega(T_2) = \Omega(T_0) < \varepsilon,$$

а тогда $\Omega(T_1) < \varepsilon$ и $\Omega(T_2) < \varepsilon$. Таким образом, мы с помощью разбиения T отрезка $[a,b]$ построены разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, суммы $\Omega(T_1)$ и $\Omega(T_2)$ будут меньше ε.

Отсюда получаем интегрируемость функции f на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ в силу инфимум-критерия.

2) Обратно, из интегрируемости функции f на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ следует существование таких разбиений T_1 и T_2 этих отрезков

что соответствующие омега-суммы будут меньше любого заданного наперёд $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разбиение $T = T_1 \cup T_2$ Тогда

$$\Omega(T) = \Omega(T_1) + \Omega(T_2) < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Таким образом по инфимум-критерию получаем интегрируемость функции f на отрезке $[a,b]$.

Докажем теперь формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если к разбиениям T_1 и T_2 добавить разметки ξ_1 и ξ_2 и положить $T_0 = T_1 \cup T_2$, то для соответствующих интегральных сумм получим равенство:

$$\sigma(f, T_0, \xi) = \sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2),$$

где $\xi = \xi_1 \cup \xi_2$. Используя условие и уже доказанные свойства 1 и 2, можем перейти к пределу при диаметрах разбиений, стремящихся к нулю, в результате чего получим равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Подробную запись на языке “$\varepsilon - \delta$” опускаем. □

В дальнейшем всегда будем считать, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. Свойство аддитивности теперь можно сформулировать по-другому: *если функция f интегрируема на отрезке $[A,B]$, $A < B$ и a, b, $c \in [A,B]$, то*

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx + \int\limits_b^a f(x)dx = 0.$$

Упражнение 1. Докажите эту переформулировку свойства аддитивности.