Лекция 24

Классы интегрируемых функций

Докажем теперь несколько теорем,в которых утверждается, что если функция обладает некоторыми свойствами, то есть принадлежит классу всех функций, обладающих этими свойствами, то она интегрируема.

Начнём с самого простого, но очень важного класса непрерывных функций.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Напомним, что по теореме Кантора всякая непрерывная на отрезке функция является равномерно непрерывной на этом отрезке. Используя эту теорему, по любому заданному $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать такое $\delta > 0$, что при всех $x, y \in [a, b]$ и таких, что $|x - y| < \delta$, будем иметь $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Возьмём разбиение T отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(T) < \delta$. Это означает, что для любого отрезка Δ_k разбиения T выполнено неравенство $|\Delta_k| < \delta$. Тогда для колебания функции f на любом отрезке Δ_k будем иметь $\omega_k = \sup\limits_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Отсюда для омега-суммы получим:

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k |\Delta_k| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k| = \varepsilon(b - a).$$

Так как $b - a$ – это фиксированное число, а ε может быть сделано сколь угодно малым, то по критерию интегрируемости функции получаем интегрируемость f на отрезке $[a, b]$. $\square$

Теорема 2. *Пусть функция f ограничена и монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Мы можем считать, что f не убывает, так как в противном случае вместо функции f можно рассмотреть $-f$. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a, b]$. В силу неубывания функции на любом отрезке разбиения Δ_k для колебания функции верно равенство $\omega_k(f) = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Если $d(T) < \delta$, то

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k |\Delta_k| < \delta \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

При этом $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \leq f(b) - f(a)$, так как функция f не убывает и ограничена по условию. Поэтому если при любом $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, то для любого разбиения T с $d(T) < \delta$ будем иметь

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k |\Delta_k| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Таким образом, f интегрируема в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний. $\square$

Отметим, что функции, рассматриваемые в теореме 2 могут иметь даже бесконечное число точек разрыва. С другой стороны, не все непрерывные на отрезке функции монотонны, поэтому класс функций, рассмотренный в теореме 1 и класс функций из теоремы 2 пересекаются, но не совпадают.

В следующей теореме рассматривается ещё один класс функций, не совпадающий ни с одним из рассмотренных выше.

Теорема 3. *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нём конечное число точек разрыва. Тогда f интегрируема на $[a, b]$.*

(Доказательство на пятёрку).

Доказательство. Мы хотим применить инфимум-критерий, то есть доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Положим $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Пусть $c_1, ..., c_l$ – все точки разрыва функции f на отрезке $[a, b]$. Окружим каждую из этих точек окрестностью вида $(c_i - \varepsilon_1, c_i + \varepsilon_1),\ i = 1,\ ...,\ l$, где $\varepsilon_1 > 0$ задано. Во всех точках отрезка $[a, b]$, не принадлежащих этим окрестностям, функция f непрерывна. Множество точек непрерывности состоит из конечного объединения отрезков $[c_{i-1} + \varepsilon_1, c_i - \varepsilon_1],\ i = 1,\ ...,\ l$. На каждом из этих отрезков функция f непрерывна, а тогда по теореме Гейне – Кантора и равномерно непрерывна, поэтому для выбранного выше $\varepsilon_1 > 0$ на каждом из таких отрезков можно выбрать такое число δ_i, что при всех $x,\ y \in [c_{i-1} + \varepsilon_1, c_i - \varepsilon_1],\ |x - y| < \delta_i$ будет выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$. Пусть теперь $\delta := \min\{\delta_1.\ ...,\ \delta_l\}$. Выберем любое разбиение T *всех* отрезков с диаметром меньше δ. Добавим к отрезкам этого разбиения все построенные окрестности точек разрыва и их концы. Получим разбиение T_0 отрезка $[a, b]$. Тогда $\Omega(T_0)$ состоит из двух групп слагаемых, в одной из которых отрезки разбиения – это то, что получено из окрестностей, то есть $[c_i - \varepsilon_1, c_i + \varepsilon_1],\ i = 1,\ ...,\ l$, а в другой – отрезки разбиения T. В первой группе слагаемых сумма длин всех отрезков равна $2l\varepsilon_1$, а во второй – не превосходит $b - a$. При этом колебания функции на отрезках первой группы не превосходят $2M$ в силу ограниченности, а на отрезках второй группы колебания меньше ε_1. Таким образом, имеем неравенство для омега-суммы:

$$\Omega(T_0) \le 4Ml\varepsilon_1 + \varepsilon_1(b - a) = \varepsilon_1(4Ml + b - a).$$

Теперь в силу произвольности ε_1 для выполнения инфимум-критерия остаётся только положить $\varepsilon = \varepsilon_1(4Ml + b - a)$. □

Интегралы с переменными пределами интегрирования

Наша ближайшая цель – сформулировать и доказать формулу Ньютона – Лейбница.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда из свойства аддитивности определённого интеграла следует, что при любом $x \in [a, b]$ функция f интегрируема на отрезке $[a, x]$. При различных $x \in [a, b]$ интеграл от f по отрезку $[a, x]$ принимает, вообще говоря, различные значения. Таким образом, можно рассмотреть функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Изучим свойства этой функции.

Теорема 4. *1) Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$.*
2) Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда функция F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. **1)** Из интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ следует её ограниченность на этом отрезке, то есть существует такое $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ при всех

$x \in [a,b]$. Если $x,\ x+h \in [a,b]$, то, используя свойства интеграла из предыдущей лекции, получим:

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \le M|h|.$$

Отсюда, если $h \to 0$, то и $|F(x+h) - F(x)| \to 0$, то есть выполнено определение непрерывности для функции F в точке x. Так как эти рассуждения верны для любой точки $x \in [a,b]$, то тем самым непрерывность F на отрезке $[a,b]$ доказана.
2) Непрерывность функции f в точке x_0 означает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $t \in U_\delta(x_0)$ справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, что равносильно $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$. Тогда при $|h| < \delta$

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon)dt \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \le \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon)dt$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le f(x_0) + \varepsilon.$$

При стремлении h к нулю неравенства сохраняются для произвольного $\varepsilon > 0$, поэтому

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x_0).$$

$\square$

Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то есть непрерывна в каждой его точке, то F дифференцируема на этом отрезке в силу пункта 2) только что доказанной теоремы, причём $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x)$ (на концах имеются в виду односторонние производные). Таким образом, в этом случае функция F является первообразной функции f на отрезке $[a,b]$.

Отметим, однако, что если функция f не является непрерывной, но интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

всё равно может быть дифференцируема, однако равенство $F'(x) = f(x)$ уже может не иметь места. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0,1] \setminus \{1/2\}, \\ 1, & \text{если } x = 1/2 \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0,1]$ и $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = 0$ при всех $x \in [0,1]$. Таким образом, $F'(\frac{1}{2}) = 0 \ne f(1/2) = 1$.

Пример 1. *1) Функция $f(t) = e^{-t^2}$ дифференцируема на всей прямой. Найдём производную функции $F(x) = \int\limits_a^x e^{-t^2}dt$, например, в точке $x = 2$. Обратим внимание, что первообразная от такой подынтегральной функции не выражается в элементарных функциях*

(то есть соответствующий неопределённый интеграл является "неберущимся"), поэтому с помощью нахождения интеграла задачу не решишь. Однако этого и не требуется, так как, по пункту 2 доказанной теоремы $F'(2) = f(2) = e^{-2^2} = 1/e^4$.
2) Отметим также, что можно рассматривать интегралы с переменными нижними пределами или интегралы, в которых оба предела интегрирования являются какими-то переменными величинами, например, функциями. В таких случаях при дифференцировании может оказаться полезной теорема о производной сложной функции. Найдём, к примеру, производную функции $G(x) = F(x^2) = \int\limits_a^{x^2} e^{-t^2} dt$, *пользуясь теоремой о производной сложной функции:*

$$G'(x) = F'(x^2) \cdot (x^2)' = 2xe^{-(x^2)^2} = 2xe^{-x^4}.$$