Лекция 25

Формула Ньютона – Лейбница

Определение 1. *Обобщенной первообразной функции f на интервале (a, b) называется непрерывная на этом интервале функция F, для которой при всех $x \in (a, b)$ за исключением, быть может, конечного лишь числа точек интервала (a, b) выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x).$$

Отметим, что любая ограниченная и имеющая лишь конечное число точек разрыва на отрезке $[a, b]$ функция f обладает обобщенной первообразной на этом отрезке (в концах берётся односторонняя производная). В качестве таковой может выступать функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Она будет обобщенной первообразной для f в силу теоремы 4 предыдущей лекции.

Предложение 1. *Любые две обобщённые первообразные функции f на интервале (a, b) отличаются на константу.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 – две обобщенные первообразные функции f на интервале (a, b). Пусть точки $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ – это все те точки интервала (a, b), в которых либо не существует F_1' или F_2', либо не выполнено равенство $F_1'(x) = f(x)$ или $F_2'(x) = f(x)$. На интервалах $(a, x_1),\ ...,\ (x_n, b)$ справедливы равенства $F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, а тогда по первому следствию теоремы Лагранжа функция $F_1 - F_2$ постоянна на каждом из этих интервалов. В силу непрерывности функций F_1 и F_2 их разность также непрерывна на (a, b), а значит, на концах интервалов $(a, x_1),\ ...,\ (x_n, b)$ функция $F_1 - F_2$ также непрерывна, то есть на всём интервале (a, b) эта функция является константой. □

Мы готовы к тому, чтобы сформулировать и доказать формулу Ньютона – Лейбница.

В этом разделе будет доказана одна из основных теорем анализа. Она позволит вычислять многие определённые интегралы с помощью неопределённых.

Теорема 1. *Пусть функция f ограничена и имеет лишь конечное число точек разрыва на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для f на $[a, b]$ и для любой первообразной Φ функции f на отрезке $[a, b]$ выполнено равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Напомним, что функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

непрерывна на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$, при которых f непрерывна. Тогда F является обобщенной первообразной для f по определению. При этом $F(a) = 0$, так что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) = F(b) - F(a).$$

Так как все первообразные функции f отличаются на константу, то для всех $x \in [a,b]$ $\Phi(x) = F(x) + C$ при некотором $C \in \mathbb{R}$ для любой первообразной Φ функции f, поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\square$

Важность этой теоремы, помимо прочего, ещё и в том, что она устанавливает связь между интегралом Римана и первообразными, так как в ней указывается, для каких классов функций интеграл Римана может быть выражен через разность значений первообразной подынтегральной функции. Конечно, есть функции, не принадлежащие классу функций, рассмотренному в теореме (то есть функции, у которых бесконечно множество точек разрыва), для которых формула Ньютона – Лейбница выполнена, но мы не будем рассматривать такие ситуации.

Приведём примеры вычисления определённых интегралов с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

Пример 1. *1) Важно условие непрерывности обобщённой первообразной. Например, рассмотрим интеграл* $\int\limits_1^2 xe^{x^2}dx$. *Так как подынтегральная функция непрерывна на отрезке* $[1,2]$, *то у неё существует точная первообразная на этом отрезке, которая также непрерывна. Найдём её:*

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C,$$

поэтому $\int\limits_1^2 xe^{x^2}dx = \frac{e^4-e}{2}$. *Итак, удалось найти интеграл, так как первообразная непрерывна и все условия теоремы выполнены.*

2) Теперь с помощью формулы Ньютона – Лейбница найдём интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos x}$.

Подынтегральная функция снова непрерывна и положительна, поэтому и значение интеграла должно быть положительным. Найдём первообразную.

$$\int \frac{dx}{4+\cos x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}(x/2), \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = 2\int \frac{2dt}{5+3t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C.$$

Однако разность $\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2}}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{0}{2}}{\sqrt{5}} = 0 - 0 = 0$, *то есть к функции*

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}$$

формула Ньютона – Лейбница неприменима.

Причина в том, что на отрезке $[0, 2\pi]$ F *не является обобщённой первообразной для функции* $f(x) = \frac{1}{4+\cos x}$, *потому что она не определена в точке* π, *а также имеем*

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{15}} \text{ и } \lim_{x\to\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{15}},$$

то есть F невозможно доопределить в точке π так, чтобы она была непрерывной. Вспоминая замечания, которые были после составления таблицы интегралов (перечитайте!), мы можем заключить, что для функции f отдельно на полуинтервале $[0,\pi)$ найдена первообразная

$$F(x)+C_1=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C_1,$$

а на полуинтервале $(\pi,2\pi]$ – первообразная

$$F(x)+C_2=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C_2,$$

причём константы C_1 и C_2 выбираются независимо. Подберём эти константы так, чтобы предел слева в точке π функции $F(x)+C_1=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C_1$ совпал с пределом справа в π функции $F(x)+C_2=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C_2$, положив, например, $C_1=-\frac{\pi}{\sqrt{15}}$, а $C_2=\frac{\pi}{\sqrt{15}}$. Тогда функция

$$F_1(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}-\frac{\pi}{\sqrt{15}}, & \text{если } x\in[0,\pi),\\ 0, & \text{если } x=\pi,\\ \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\pi}{\sqrt{15}}, & \text{если } x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$$

непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$, а в каждой точке отрезка, кроме π, $F_1'(x)=f(x)$, то есть F_1 – обобщённая первообразная функции f на отрезке $[0,2\pi]$, а тогда по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x}=F_1(2\pi)-F_1(0)=\frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$$

Итак, ещё раз отметим, что при применении формулы Ньютона – Лейбница важна непрерывность обобщённой первообразной.

***3)** Иногда применение формулы Ньютона – Лейбница невозможно, так как, например, у подынтегральной функции нет первообразной, являющейся элементарной функцией. В этом случае могут помочь геометрические соображения. Например, интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\sin(x^3)dx$ равен нулю, так как подынтегральная функция нечётная, то есть её график симметричен относительно начала координат, криволинейные трапеции, образованные частями графика, лежащими над осью Ox имеют такие же площади, как и части графика, лежащие под осью Ox, но знаки этих площадей различны и при вычислении интеграла они "сокращаются".*

Ниже будет дано более строгое обоснование.

Перенесём на определённые интегралы формулы замены переменной и интегрирования по частям.

Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле

Теорема 2. ***(Интегрирование по частям).*** *Пусть функции f и g дифференцируемы на отрезке $[a,b]$ и функция $(fg)'$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нём лишь конечное число точек разрыва. Пусть также функция $f'g$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

Тогда функция $g'f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)dx,$$

где запись $h(x)|_a^b$ означает $h(b)-h(a)$.

Доказательство. Пусть $h(x)=f(x)g(x)$. Тогда $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, что равносильно $g'(x)f(x)=h'(x)-f'(x)g(x)$, откуда следует, что функция $g'f$ интегрируема как разность интегрируемых функций. Далее, по формуле Ньютона – Лейбница

$$f(x)g(x)|_a^b = h(x)|_a^b = \int\limits_a^b h'(x)dx = \int\limits_a^b (f'(x)g(x)+g'(x)f(x))dx,$$

откуда получаем требуемую формулу в силу свойства линейности интеграла. □

Теорема 3. ***(Замена переменной).*** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_1,x_2]$, причём $a,\ b\in[x_1,x_2]$, $a<b$. Пусть также функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и $\varphi(t)\in[x_1,x_2]$ при $\alpha\le t\le\beta$. Тогда справедлива следующая формула замены переменной:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. В силу непрерывности f на отрезке $[a,b]$ существует первообразная F функции f, причём $F'(x)=f(x)$ при всех $x\in[a,b]$. По формуле Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. Рассмотрим функцию $G(t):=F(\varphi(t)),\ t\in[\alpha,\beta]$. Эта функция дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, причём

$$G'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Таким образом, $G(t)$ является первообразной для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, а тогда, по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

□

Пример 2. ***1)*** $\int\limits_1^2 xe^x dx = xe^x|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x dx = 2e^2-e-e^2+e=e^2.$

2) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left|\begin{array}{c} x=\sin t,\\ t=\arcsin x\in[0,\frac{\pi}{2}];\\ \cos t dt = dx\end{array}\right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{\pi}{4}.$

3) *Теперь обоснуем геометрические соображения из пункта 3 предыдущего примера с помощью формулы замены переменной. Найдём интеграл $\int\limits_{-1}^1 \sin(x^3)dx$. В силу аддитивности*

$$\int\limits_{-1}^1 \sin(x^3)dx = \int\limits_{-1}^0 \sin(x^3)dx + \int\limits_0^1 \sin(x^3)dx,$$

а для первого слагаемого имеем

$$\int\limits_{-1}^{0} \sin(x^3)dx \quad = \quad \begin{vmatrix} x = -t, \\ dx = -dt; \\ t \in [1, 0] \end{vmatrix} \quad = \quad \int\limits_{1}^{0} \sin(-t^3)(-dt) \quad = \quad \int\limits_{1}^{0} \sin(t^3)dt \quad = \quad -\int\limits_{0}^{1} \sin(t^3)dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{1} \sin(x^3)dx = -\int\limits_{0}^{1} \sin(t^3)dt + \int\limits_{0}^{1} \sin(x^3)dx = 0.$$