Лекция 26

Первая и вторая теоремы о среднем

Теорема 1. ***(1-я теорема о среднем).*** *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Пусть также функция g неотрицательна на $[a,b]$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда существует такое $\mu \in [m,M]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Так как g неотрицательна на $[a,b]$, то при всех $x \in [a,b]$ справедливы неравенства $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. В силу свойств интеграла имеем

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, а тогда можно выбрать $\mu = m$. Если $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \le M.$$

Тогда, полагая $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$, получим утверждение теоремы. □

Замечание. 1) Отметим, что если в условиях теоремы функция f непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Коши о промежуточном значении она принимает все промежуточные значения между m и M (включая, согласно второй теореме Вейерштрасса, и сами эти значения), поэтому найдётся такая точка $c \in [a,b]$, что $\mu = f(c)$, откуда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx$.
2) Если в условиях теоремы f непрерывна на $[a,b]$, а $g(x) = 1$ при всех $x \in [a,b]$, то по п. 1 замечания найдётся такая точка $c \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)(b-a)$. Таким образом интеграл Римана от непрерывной функции равен произведению. длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке этого отрезка.

Доказательство следующей теоремы не является обязательным, но мы применим её при изучении дальнейших тем.

Теорема 2. ***(2-я теорема о среднем).*** *Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Пусть также функция g неотрицательна и не убывает на $[a,b]$. Тогда существует такое $c \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Факультативный материал.

Доказательство. Пусть $T_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ – такие разбиения отрезка $[a,b]$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} d(T_n) = 0$. Рассмотрим сумму

$$\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Отметим, что так как f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, поэтому существует такое $M > 0$, что $|f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]$. Кроме того, в силу неубывания функции g на отрезке $[a,b]$ на каждом отрезке разбиения Δ_k выполнено равенство $\omega_k(g) = g(x_k) - g(x_{k-1})$. Тогда, опять же в силу неубывания g, справедливо равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(g) = g(b) - g(a)$.

Таким образом, можем выписать следующие оценки:

$$\left|\sigma_n - \int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_k) - g(x))f(x)dx\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|dx \le Md(T_n) \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g) = M(g(b) - g(a))d(T_n),$$

откуда, в силу того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} d(T_n) = 0$, получаем $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

В силу свойств интеграла с переменным верхним пределом функция

$$F(x) = \int\limits_x^b f(t)dt = -\int\limits_b^x f(t)dt$$

непрерывна на отрезке $[a,b]$, поэтому по второй теореме Вейерштрасса существуют такие точки $\alpha, \beta \in [a,b]$, что $F(\alpha) = \min\limits_{a\le x\le b} F(x)$, а $F(\beta) = \max\limits_{a\le x\le b} F(x)$.

Представим σ_n в другом виде:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{b} f(x)dx - \int\limits_{x_k}^{b} f(x)dx \right) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_k) = g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k).$$

В правой части учтено, что $g(b)F(b) = g(b)\int\limits_b^b f(t)dt = 0$.

Таким образом,

$$\sigma_n = g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k) \ge$$

$$\ge F(\alpha)\left(g(x_1) + \sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k+1}) - g(x_k))\right) = F(\alpha)g(b)$$

и, аналогично,

$$\sigma_n = g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k) \leq$$

$$\leq F(\beta)\left(g(x_1) + \sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k+1}) - g(x_k))\right) = F(\beta)g(b),$$

то есть $F(\alpha)g(b) \leq \sigma_n \leq F(\beta)g(b)$, откуда, переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим, в силу предельного перехода в неравенствах, что $F(\alpha)g(b) \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq F(\beta)g(b)$. Если $g(b) = 0$, то $g(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$, а тогда достаточно взять $c = a$ в утверждении теоремы. Если $g(b) \neq 0$, то

$$F(\alpha) \leq \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq F(\beta).$$

F непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому принимает все промежуточные значения, то есть найдётся такая точка $c \in [a, b]$, что $F(c) = \int\limits_c^b f(t)dt = \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, откуда и получим $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int\limits_c^b f(x)dx$. □

Конец факультативного материала

Отметим, что если предположить дифференцируемость функции g на отрезке $[a, b]$ и неотрицательность и непрерывность g' на этом отрезке, то доказательство существенно упростится: можно применить интегрирование по частям и первую теорему о среднем. Вторая теорема о среднем допускает некоторые переформулировки.

Переформулировки второй теоремы о среднем.

1) Если неубывающую на $[a, b]$ функцию g заменить на невозрастающую на этом отрезке, то при сохранении всех прочих условий теоремы при некотором $c \in [a, b]$ будет справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int\limits_a^c f(x)dx$.

2) Если неубывающую и неотрицательную на $[a, b]$ функцию g заменить просто на монотонную на этом отрезке, то при сохранении всех прочих условий теоремы при некотором $c \in [a, b]$ будет справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int\limits_a^c f(x) + g(b) \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Приведём примеры применения второй теоремы о среднем для получения некоторых оценок.

Пример 1. *Рассмотрим интеграл* $\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}dx,\ \ b > a > 0$. *Функции* $y = \sin x$ *и* $y = \frac{1}{x}$ *интегрируемы на* $[a, b]$, *причём* $y = \frac{1}{x}$ *неотрицательна и не возрастает на этом отрезке. Поэтому по второй теореме о среднем (см. переформулировку 1) существует такая точка* $c \in [a, b]$, *что* $\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{a} \int\limits_a^c \sin x dx$. *Тогда*

$$\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\frac{1}{a} \int\limits_a^c \sin x dx\right| = \left|\frac{1}{a}(\cos a - \cos c)\right| \leq \frac{1}{a}(|\cos a| + |\cos c|) \leq \frac{2}{a}.$$

Кроме того, что теоремы о среднем полезны при оценках интегралов, они потребуются нам при изучении несобственных интегралов.

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 3. *Пусть n – неотрицательное целое число. Пусть также функция f непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[a,x]$. Тогда*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Докажем по индукции. При $n=0$ $f(x)=f(a)+\frac{1}{0!}\int\limits_a^x f'(t)dt$, что равносильно формуле Ньютона – Лейбница.

Пусть равенство справедливо при $n=k$. В этом случае остаточный член запишется в виде $\frac{1}{k!}\int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt$. Интегрируя его по частям, получим

$$\frac{1}{k!}\int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt=-\frac{1}{(k+1)!}\int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)d(x-t)^{k+1}=$$

$$=-\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(t)(x-t)^{k+1}|_a^x+\frac{1}{(k+1)!}\int\limits_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}dt=$$

$$=\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}+\frac{1}{(k+1)!}\int\limits_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}dt$$

Подставляя в верное по предположению индукции при $n=k$ равенство полученное выражение, видим, что формула Тейлора справедлива и при $n=k+1$, то есть теорема доказана. □

Эта теорема очень полезна при получении некоторых разложений по формуле Тейлора, например, при разложении арктангенса и логарифма. Получим эти формулы.

Пример 2. *Прежде всего напомним, что по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $-x$, $|x|<q$, $x\neq 0$*

$$1-x+x^2-x^3+...(-1)^n x^n+...=\frac{1}{1+x}.$$

1) Рассмотрим функцию $f(x)=\ln(1+x)$. Как мы знаем, $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, поэтому при всех таких x, что $|x|<1$, можем записать равенство

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k+\frac{(-x)^n}{1+x},$$

где $\frac{(-x)^n}{1+x}=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(-1)^k x^k$.

Интегрируя это равенство, получим

$$\int\limits_0^x f'(t)dt=\int\limits_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+(-1)^n\int\limits_0^x\frac{t^n dt}{1+t}.$$

Можно непосредственно убедиться, что равенство остаётся справедливым при $x = 0$ *и* $x = 1$.

2) Если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, *то*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}.$$

Снова интегрируя, получим

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^n \int\limits_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

По первой теореме о среднем существует такое $c \in [0, x]$, *что*

$$(-1)^n \int\limits_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} = \frac{(-1)^n}{1+c^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

откуда видно, что остаточный член стремится к нулю при $n \to +\infty$ *и* $|x| \le 1$, *что означает равенство*

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

при $|x| \le 1$.