Лекция 27

Несобственные интегралы

Как известно, интеграл Римана определяется только для функций, заданных на отрезке и ограниченных на нём. Однако иногда возникают интегралы по бесконечным промежуткам, либо интегралы, в которых подынтегральные функции не ограничены на отрезках, по которым ведётся интегрирование. В таком случае мы можем определить подобные интегралы с помощью перехода к пределу. Перейдём к точным определениям.

Определение 1. *Пусть $a \in \mathbb{R}$, при всех $b > a$ функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Если существует $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, то этот предел называется* ***несобственным интегралом первого рода*** *от функции f на промежутке от $[0, +\infty)$. Интеграл по бесконечному промежутку обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.*

Отметим, что интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$ при любом $b \in [a, +\infty)$ равносильна её интегрируемости на любом отрезке, содержащемся в промежутке $[a, +\infty)$ в силу аддитивности интеграла Римана по отрезку.

Это определение без труда переносится на интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, так как $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{c\to-\infty} \int\limits_c^a f(x)dx$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, поэтому такие интегралы, в случае интегрируемости функции f на любом отрезке, содержащемся в промежутке интегрирования, мы также будем называть интегралами первого рода.

При такой терминологии обычный интеграл Римана называют собственным. Приведём очень важный пример несобственного интеграла, которым часто будем пользоваться в дальнейшем.

Пример 1. *Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$, $a > 0$. При $q = 1$*

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty,$$

то есть в этом случае интеграл расходится.

При $q \neq 1$

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^q} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-q}(b^{1-q} - a^{1-q}).$$

При $q > 1$ этот предел равен $\frac{1}{q-1}a^{1-q}$, а при $q < 1$ он равен $+\infty$.

Таким образом, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$, $a > 0$ сходится при $q > 1$.

Интегрируемость функции f на любом отрезке, содержащемся в промежутке интегрирования, означает, что f ограничена на любом таком отрезке. Однако возможны ситуации, когда функция f не ограничена на отрезке интегрирования. Интегралы от такого типа функций приводят нас к следующему определению.

Определение 2. *Пусть функция f определена и неограничена на промежутке $[a, b)$. Пусть f интегрируема по Риману на отрезке $[a, \alpha]$ при любом $\alpha \in [a, b)$ и существует $\lim\limits_{\alpha \to b-0} \int\limits_a^\alpha f(x)dx$. Тогда этот предел называется **несобственным интегралом второго рода** от функции f на промежутке от $[a, b)$. Несобственный интеграл второго рода обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.*

Отметим, что для несобственного интеграла второго рода обозначение такое же, как для обычного интеграла Римана, однако подынтегральная функция не является ограниченной.

Точка b называется особой точкой интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. Аналогично определяется интеграл, в котором особая точка является нижним пределом интегрирования: $\lim\limits_{\beta \to b+0} \int\limits_\beta^c f(x)dx$. При этом функция f интегрируема на любом отрезке вида $[\beta, c]$, $\beta \in (b, c]$. Особая точка может находиться и внутри промежутка интегрирования:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \lim_{\alpha \to b-0} \int\limits_a^\alpha f(x)dx + \lim_{\beta \to b+0} \int\limits_\beta^c f(x)dx.$$

Оба предела в последнем равенстве должны существовать независимо друг от друга. Аналогичное замечание справедливо и для интегралов первого рода. Все интегралы, рассмотренные после определения 2, мы также отнесём к несобственным интегралам второго рода.

Пример 2. *1) Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$. При $p = 1$*

$$I = \lim_{\alpha \to 0+} \int\limits_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to 0+} (\ln 1 - \ln \alpha) = +\infty,$$

то есть в этом случае интеграл расходится.

При $p \neq 1$

$$I = \lim_{\alpha \to 0+} \int\limits_\alpha^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{1-p}(1 - \alpha^{1-p}).$$

При $p < 1$ этот предел равен $\frac{1}{1-p}$, а при $p > 1$ он равен $+\infty$.

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p < 1$.

2) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажем по индукции, что $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$. При $n = 1$, интегрируя по частям, имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(x e^{-x} \Big|_0^b + \int\limits_0^b e^{-x} dx \right) = 1.$$

Предположим, что при $n = k$ выполнено равенство $\int\limits_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = k!$. При $n = k+1$, снова интегрируя по частям, получим, учитывая предположение индукции,

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{k+1} e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} (-x^{k+1} e^{-x}|_0^b + (k+1) \int\limits_0^b x^k e^{-x} dx = (k+1)k! = (k+1)!.$$

При этом то, что $\lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{x^{k+1}}{e^x}\right) = 0$, легко доказать с помощью правила Лопиталя (см. примеры в соответствующей лекции).

Бывают ситуации, когда несобственные интегралы берутся по бесконечным промежуткам и от неограниченных в окрестности некоторых точек функций. В этих случаях интегралы можно разбить на сумму нескольких интегралов первого и второго рода, поэтому такие ситуации сводятся к рассмотренным в определениях 1 и 2.

Ниже мы будем обозначать $+\infty$, $-\infty$, или особую точку b символом ω. Во всех дальнейших ситуациях ω будет концом промежутка. При этом a может лежать и правее ω, но, в силу равенства $\int\limits_a^\omega f(x)dx = -\int\limits_\omega^a f(x)dx$, несобственные интегралы мы можем обозначать единым символом $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ без нарушения общности.

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ означает существование предела при $c \to \omega$ функции $F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$, которая определена и непрерывна на промежутке $[a, \omega)$ в силу определений 1 и 2 и свойств интеграла с переменным верхним пределом (c стремится к ω в зависимости от конкретного значения ω либо слева, либо справа). Так как для обычного интеграла Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ предел функции $F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$ при $c \to b$ равен $F(b)$ из-за непрерывности функции F, то несобственный интеграл по промежутку $[a, b)$ от интегрируемой на $[a, b]$ функции совпадает с обычным интегралом Римана от f по отрезку $[a, b]$.

В силу критерия Коши существования предела функции (см. предыдущие лекции), получаем следующую теорему.

Теорема 1. ***(Критерий Коши).*** *Интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $B_\varepsilon \in (a, \omega)$, что при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство*

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Существование предела функции

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$$

при $c \to \omega$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число B_ε, что для всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$|F(a_2) - F(a_1)| < \varepsilon,$$

которое в силу аддитивности интеграла равносильно неравенству

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

$\square$

Отметим, что в качестве промежутка (B_ε, ω) может выступать любой из промежутков $(B_\varepsilon, +\infty),\ (B_\varepsilon, -\infty),\ (B_\varepsilon, b),\ b \in \mathbb{R}$, где b – особая точка несобственного интеграла второго рода.

Отметим, что для несобственных интегралов остаются справедливыми свойства линейности и аддитивности. Это легко следует из свойств предела и интеграла Римана.

Сходимость интегралов от неотрицательных функций

Часто требуется ответить на вопрос, сходится ли несобственный интеграл. При этом вычислять интеграл не требуется, а иногда такое вычисление и невозможно. Сейчас мы сформулируем и докажем несколько признаков, дающих *достаточные* условия сходимости интегралов от неотрицательных функций.

Прежде всего отметим, что если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a, \omega)$, то функция

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$$

не убывает при приближении к ω, поэтому предел значений $F(c)$ при $c \to \omega$ существует тогда и только тогда, когда F ограничена (см. теорему Вейерштрасса для монотонных функций). Этот критерий полностью аналогичен критерию сходимости рядов с неотрицательными членами. Полезно повторить вообще материал про ряды, потому что возникает много похожего с результатами для несобственных интегралов.

Теорема 2. ***(Признак сравнения).*** *Пусть для всех $x \in [a, \omega)$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq g(x)$, функция f интегрируема на отрезке $[a, c]$ при любом $c \in [a, \omega)$ и интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ сходится. Тогда интегралы $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$ сходятся.*

Доказательство. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ следует, что для этого интеграла выполнен критерий Коши, то есть при любом $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε, что при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ получаем в силу неотрицательности функции

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} g(x)dx\right| = \int\limits_{a_1}^{a_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Тогда по свойствам определённого интеграла

$$0 \leq \left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{a_1}^{a_2} |f(x)|dx \leq \int\limits_{a_1}^{a_2} g(x)dx.$$

Отсюда следует, что критерий Коши выполнен для интегралов $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$. $\square$

Часто используется следствие этой теоремы.

Предложение 1. ***(Признак сравнения в предельной форме).*** *Пусть функция f неотрицательна, f и g интегрируемы при всех $c \in [a, \omega)$ на отрезке $[a, c]$ и*

$$f \sim g, \; c \to \omega.$$

Тогда интегралы $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega g(x)gdx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Из условия следует, что $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, поэтому (см. определение эквивалентных функций в предыдущих лекциях) найдётся такое x_0, что при всех x из интервала (x_0, ω) выполнено неравенство $g(x) > 0$. Будем рассматривать только эту окрестность. По определению предела при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $x_1 \in (x_0, \omega)$, что при всех $x \in [x_1, \omega)$ будет справедливо неравенство

$$|f(x)/g(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow (1-\varepsilon)g(x) < f(x) < (1+\varepsilon)g(x).$$

Последние неравенства означают, что интегралы $\int\limits_{x_1}^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_{x_1}^\omega g(x)gdx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

По условию функции f и g интегрируемы при всех $c \in [a, \omega)$ на отрезке $[a, c]$, откуда вытекает одновременная сходимость интегралов $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega g(x)dx$. □

Пример 3. *1) Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$. При всех $x \in [1, +\infty)$ справедливо неравенство $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится в силу примера 1. Тогда, по признаку сравнения, интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x dx}{x^2}\right|$ сходятся.*

2) Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^3}dx}{x\sqrt{x}}$. Имеем

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{\ln(1+x)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^3}}{x\sqrt{x}} : \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^3}\cdot\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = 1,$$

то есть $\frac{\ln(1+x)\operatorname{arctg}\frac{1}{x^3}}{x\sqrt{x}} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$, $x \to 0+$, а интеграл $\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ сходится в силу доказанного в пункте 1 примера 2.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Определение 3. *Несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$. Если интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ называется условно сходящимся.*

Если сходится интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$, то для него выполнен критерий Коши, то есть при любом $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε, что при всех $a_1, \; a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Из свойств интеграла следует, что $0 \le \left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx\right| \le \int\limits_{a_1}^{a_2} |f(x)|dx < \varepsilon$, то есть по критерию Коши сходится интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$. Таким образом, доказано, что *из абсолютной сходимости интеграла следует его сходимость.*

Приведём пример интеграла, сходящегося условно.

Пример 4. *Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно. Действительно, покажем сначала, что этот интеграл сходится. Интегрируя по частям, имеем*

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{-\cos x}{x}|_1^b - \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx = \cos 1 - \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

При этом $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ $\forall x \in [1,+\infty)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится согласно примеру из предыдущей лекции, поэтому $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx$ существует по признаку сравнения, а тогда сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Отметим теперь, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|\sin x| \ge \sin^2 x$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится, так как $\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$, причём интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ сходится (это снова можно показать с помощью интегрирования по частям), а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ расходится. Таким образом, интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x} - \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$$

расходится, а тогда интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ расходится по признаку сравнения.

Интегралы от функций произвольного знака

Теперь обсудим признаки сходимости интегралов от функций произвольного знака. Всюду ниже считаем, что функция f интегрируема на любом отрезке $[a,b]$, $b \in [a,\omega)$.

Теорема 3. ***(Признак Дирихле).*** *Пусть существует такое $M > 0$, что $|F(x)| \le M$ для всех $x \in [a,\omega)$, где $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$. Пусть также функция $g(x) \ge 0$ при всех $x \in [a,\omega)$ и монотонно стремится к 0 при $x \to \omega$. Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx$ сходится.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $a < \omega$.

Так как функция g монотонно стремится к нулю при $x \to \omega$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε, что при всех $x \in (B_\varepsilon,\omega)$ выполнено неравенство

$$0 \le g(x) < \varepsilon.$$

В силу ограниченности F при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ получим, используя вторую теорему о среднем:

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(a_1)\int\limits_{a_1}^{a_3} f(x)dx\right| < \varepsilon\left|\int\limits_{a_1}^{a_3} f(x)dx\right| = \varepsilon\left|\int\limits_{a}^{a_3} f(x)dx - \int\limits_{a}^{a_1} f(x)dx\right| \leq 2M\varepsilon,$$

где $a_3 \in [a_1, a_2]$. Таким образом, для интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx$ выполнен критерий Коши, поэтому этот интеграл сходится. $\square$

Теорема 4. ***(Признак Абеля).*** *Пусть интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится. Пусть также функция g монотонна, ограничена и неотрицательна при $x \in [a, \omega)$. Тогда интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx$ сходится.*

Доказательство. Снова без ограничения общности считаем, что $a < \omega$.

В силу сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ по критерию Коши при любом $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε, что при всех $a_1,\ a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

По второй теореме о среднем существует такое число $a_3 \in [a_1, a_2]$, что

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)dx = g(a_1)\int\limits_{a_1}^{a_3} f(x)dx + g(a_2)\int\limits_{a_3}^{a_2} f(x)dx.$$

Пусть $M := \sup\limits_{x\in[a,\omega)} g(x)$. Тогда

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)dx\right| \leq g(a_1)\left|\int\limits_{a_1}^{a_3} f(x)dx\right| + g(a_2)\left|\int\limits_{a_3}^{a_2} f(x)dx\right| < 2M\varepsilon.$$

Значит, интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx$ сходится по критерию Коши. $\square$

Упражнение 1. Как изменятся доказательства признаков Абеля и Дирихле, если $a > \omega$?

Приведём несколько примеров использования признаков Абеля и Дирихле.

Пример 5. *1) Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится при всех $\alpha > 0$, потому что если в признаке Дирихле положить $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, то для функции $F(x) = \int\limits_1^x \sin t dt$ справедливы оценки*

$$|F(x)| = \left|\int\limits_1^x \sin t dt\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq |\cos 1| + |\cos x| \leq 2,$$

при всех $x \in [1, +\infty)$, *а функция* $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0$ *и монотонно стремится к нулю при* $x \to +\infty$. *Таким образом, для интеграла* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ *выполнен признак Дирихле, а потому этот интеграл сходится.*

2) *Рассмотрим интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int\limits_0^{1} \sin(x^2) dx + \int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

Первое слагаемое представляет собой интеграл Римана, так как подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0, 1]$. *Для второго интеграла имеем:*

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2) dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2,\ t \in [1, +\infty) \\ dt = 2x dx; \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt,$$

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt$ *сходится по пункту 1. Таким образом, интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ *сходится.*

Обратим внимание, что при этом подынтегральная функция $f(x) = \sin x^2$ *не стремится к нулю, то есть в случае сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку подынтегральная функция не обязана стремиться к нулю.*

3) *Интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+1} \operatorname{arctg} x dx$ *сходится по признаку Абеля, так как* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+1} dx$ *сходится по признаку Дирихле, а функция* $g(x) = \operatorname{arctg} x$ *неотрицательна, монотонна и ограничена при* $x \geq 0$.