

Лекция 28

Приложения определённого интеграла (площадь)

Мы не будем строго определять понятие площади. Сейчас мы, обсудив некоторые интуитивно очевидные свойства площади, покажем, что для вычисления площадей некоторых множеств на плоскости можно воспользоваться понятием определённого интеграла.

Площадь плоской фигуры D мы будем обозначать $S(D)$. Отметим несколько интуитивно очевидных свойств площади, известных из школьного курса.

- 1) Площадь всякой фигуры D , имеющей площадь, неотрицательна.
- 2) Если фигуры D_1 и D_2 имеют площадь и $D_1 \subseteq D_2$, то $S(D_1) \leq S(D_2)$.
- 3) Если фигуры D_1 и D_2 имеют площадь и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то $S(D_1 \cup D_2) = S(D_1) + S(D_2)$.
- 4) Площадь любого прямоугольника равна произведению его сторон.

Элементарными фигурами назовём те, которые состоят из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, причём прямоугольники пересекаются только по своим границам. Очевидно, что элементарные фигуры имеют площадь. Если в фигуру D на плоскости можно вписать элементарную фигуру P_1 и вокруг неё можно описать элементарную фигуру P_2 , то получим включения $P_1 \subset D \subset P_2$. Не строго говоря, можно сказать, что фигура D имеет площадь, если при любом $\varepsilon > 0$ можно вписать в D элементарную фигуру P_1 и описать вокруг D элементарную фигуру P_2 , для которых $S(P_2) - S(P_1) < \varepsilon$ (см. рисунок).

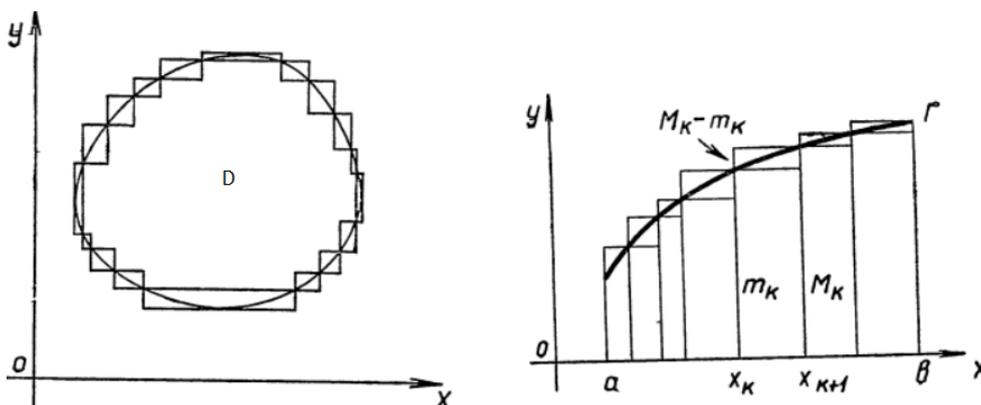


Рис. 1: Слева элементарные фигуры вписаны в D , а справа – в криволинейную трапецию

Фигуры, имеющие площадь, будем называть *квадрируемыми*.

Теперь в качестве D рассмотрим множество точек между графиком функции f , интегрируемой на отрезке $[a, b]$, и осью абсцисс. Роль элементарных фигур играют прямоугольники, соответствующие нижним и верхним суммам Дарбу (см. правую часть рисунка), а сами суммы Дарбу являются площадями соответствующих элементарных фигур. Площадь криволинейной трапеции будем обозначать $S(f, a, b)$.

Запишем свойства площади для криволинейных трапеций (для простоты считаем, что $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$).

- 1) При всех $c \in [a, b]$ $S(f, a, b) = S(f, a, c) + S(f, c, b)$.
- 2) $\inf_{a \leq x \leq b} f(x)(b - a) \leq S(f, a, b) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x)(b - a)$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать теорему о связи площади криволинейной трапеции с определённым интегралом.

Теорема 1. Пусть функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда $S(f, a, b) = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. Для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ выполнены неравенства

$$s(T) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) |\Delta_k| \leq S(f, a, b) \leq \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) |\Delta_k| = S(T),$$

то есть площадь криволинейной трапеции всегда зажата между верхней и нижней суммами Дарбу. В силу критерия интегрируемости, из того, что f интегрируема на $[a, b]$, следует, что при стремлении диаметра разбиения к нулю верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к общему значению $I = \int_a^b f(x) dx$. Тогда, по лемме о зажатом пределе,

$$S(f, a, b) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

Приложения определённого интеграла (длина дуги кривой)

Кривой L в пространстве \mathbb{R}^3 называется множество значений вектор-функции

$$(x(t), y(t), z(t)),$$

каждая компонента которой определена и непрерывна на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$. Мы в качестве промежутков будем чаще всего рассматривать отрезок $[a, b]$.

Точка $C(x, y, z)$ называется *кратной точкой кривой*, если существуют $t_1, t_2 \in [a, b]$, такие, что

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2), \quad z(t_1) = z(t_2).$$

Если точка кривой не является кратной, то она называется *простой точкой кривой*. Если кривая не имеет кратных точек, кроме, может быть, концов отрезка $[a, b]$, то она называется *простой кривой*. Если

$$x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \quad z(a) = z(b),$$

то кривая называется *простой замкнутой*.

Обсудим лишь понятие длины дуги кривой, задаваемой непрерывно дифференцируемыми функциями x, y, z . Если взять разбиение $T = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ и соединить отрезками прямых точку $A_1(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ с точкой $A_2(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$, точку $A_2(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ с точкой $A_3(x(t_3), y(t_3), z(t_3))$ и так далее до $A_n(x(t_n), y(t_n), z(t_n))$, то получим *вписанную в кривую L ломаную l* с вершинами A_1, A_2, \dots, A_n (см. рисунок).

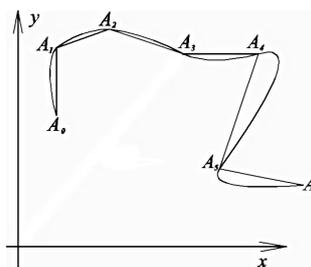


Рис. 2: Шестизвенная ломаная вписана в плоскую кривую

Отрезок $\overline{A_i A_{i+1}}$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ называется *звеном ломаной*. Длины ломаных, очевидно, равны суммам длин их звеньев, а для длины звена справедлива вытекающая из теоремы Пифагора формула

$$|\overline{A_i A_{i+1}}| = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Если длины всех вписанных ломаных, построенных по всевозможным разбиениям, ограничены сверху, то *точная верхняя грань этих длин называется длиной дуги кривой L* . Кривая, имеющая длину, называется *спрямляемой*.

Не вдаваясь в подробности, запишем свойства длин кривых, аналогичные свойствам площадей криволинейных трапеций, после чего сформулируем теорему, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 3. При этом считаем, что

$$|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Длину дуги кривой L , заданной на отрезке $[a, b]$, будем обозначать $d(L, a, b)$. Итак, свойства.

1) При всех $c \in [a, b]$ $d(L, a, b) = d(L, a, c) + d(L, c, b)$.

2) $\inf_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b - a) \leq d(L, a, b) \leq \sup_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b - a)$.

Отметим, что сам вектор $v(t) = ((x'(t), y'(t), z'(t)))$ является касательным к кривой L в точке t .

Теорема 2. Пусть функции x, y, z непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также кривая не имеет самопересечений при $t \in [a, b]$, кроме, быть может, совпадения точек $A(x(a), y(a), z(a))$ и $B(x(b), y(b), z(b))$. Тогда кривая L спрямляема и

$$d(L, a, b) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Приведём идею одного из возможных доказательств. Для этого, пользуясь тем, что функции x, y, z непрерывно дифференцируемы, применим к разностям под знаками корней теорему Лагранжа:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2} = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} (t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

где $\xi_i, \eta_i, \tau_i \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Далее можно показать, что из непрерывности функций x', y', z' на отрезке $[a, b]$, а значит и на всех отрезках $[t_i, t_{i+1}]$, следует (в силу равномерной непрерывности каждой из этих производных), что при достаточно малых диаметрах $d(T)$ разбиений отрезка $[a, b]$ сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} (t_{i+1} - t_i)$$

достаточно мало отличается от суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\zeta_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2} (t_{i+1} - t_i),$$

где $\zeta_i \in [t_i, t_{i+1}]$. То есть теперь для всех функций x', y', z' выбрана одна точка из того же отрезка, что и точки ξ_i, η_i, τ_i , причём числа

$$\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} \text{ и } \sqrt{(x'(\zeta_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2}$$

отличаются достаточно мало и обе рассматриваемые суммы лежат между числами

$$\inf_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b-a) \text{ и } \sup_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b-a).$$

Но выражение

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\zeta_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2} (t_{i+1} - t_i),$$

является интегральной суммой, и при стремлении $d(T)$ к нулю эта сумма сходится к интегралу $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$. Такова идея доказательства.

Отметим, что для плоской кривой верны все те же рассуждения, только функция z отсутствует. Кроме того, можно и обобщить всё написанное выше на пространство \mathbb{R}^n , добавляя новые координатные функции.

Примеры на вычисление площади мы обсудим на семинаре. Приведём несколько примеров на вычисление длины дуги кривой, а заодно введём несколько новых полезных понятий.

Пример 1. 1) Множество всех точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) постоянна, называется эллипсом. Можно показать, что в подходящей прямоугольной системе координат эллипс задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$ (см. рисунок).

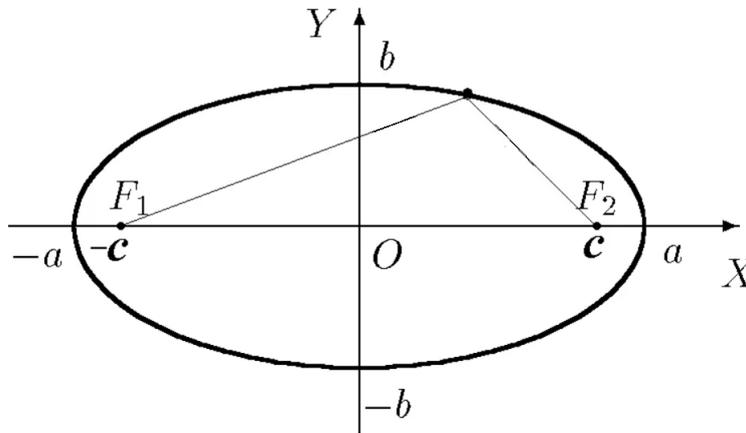


Рис. 3: Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса

Для нахождения длины эллипса параметризуем его, взяв за параметр угол t :

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Подставив в формулу для длины дуги кривой функции x и y , получим выражение для длины эллипса:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t} dt = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t} dt.$$

Полученный интеграл не выражается в элементарных функциях. Он называется полным эллиптическим интегралом второго рода, и через него выражается длина дуги эллипса. Существуют таблицы, в которых значения эллиптических интегралов указаны с высокой степенью точности. Таким образом, мы видим, что даже для просто заданных кривых нахождение длины дуги может привести к сложным интегралам. Об эллиптических интегралах подробнее можно прочитать, например, в книге Г. М. Фихтенгольца.

2) Если кривая на плоскости задана явным уравнением $L = \{(x, y) | y = f(x), x \in [a, b]\}$, то положим $x = t$. Тогда длина дуги такой кривой запишется в виде

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

3) **Полярная система координат.** Рассмотрим на плоскости луч OP с началом в точке O . Соединим произвольную точку M плоскости с точкой O . Пусть $r = |OM|$, а угол POM равен φ . Пара чисел (r, φ) называется **полярными координатами** точки M . Введенная таким образом система координат называется полярной. Отметим, что угол φ чаще всего выбирают из промежутка $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$, но, вообще говоря, этот угол может принимать любые действительные значения. Очевидно, что любой точке плоскости можно поставить в соответствие пару таких чисел. Введём теперь на этой же плоскости декартову систему координат. Пусть точка O является началом координат, а положительное направление оси абсцисс совпадает с лучом OP . В таком случае декартовы координаты точки M запишутся в виде $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (см. рисунок).

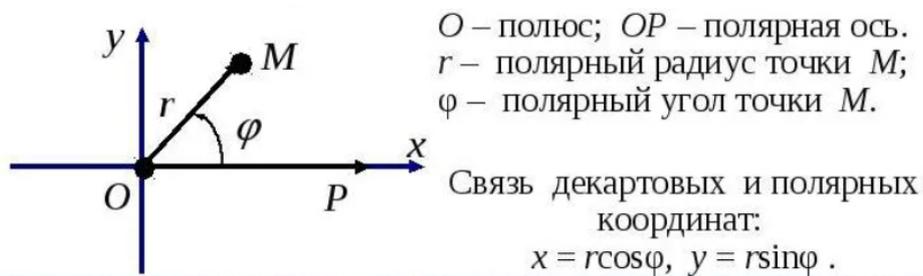


Рис. 4: Полярная система координат

Кривые в полярной системе координат чаще всего изображают, считая r функцией, зависящей от φ , то есть каждому углу ставится в соответствие расстояние между данной точкой и точкой O . Тогда, переходя к декартовым координатам, мы можем считать, что функции x и y зависят от φ , то есть

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2].$$

Таким образом, если кривая L задана в полярных координатах как функция r от аргумента φ , то, переходя к декартовым координатам и используя теорему 2, получим

$$|L| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi,$$

так как

$$\begin{aligned}(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi - r(\varphi) \cos \varphi)^2 = \\ &= r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2.\end{aligned}$$

4) Применим формулу из предыдущего пункта, чтобы найти длину дуги части кривой L , заданной уравнением $r = ae^\varphi$ ($a > 0$) и находящейся внутри круга $r = a$. Здесь угол φ принимает любые вещественные значения, а радиус возрастает при росте φ в силу экспоненциальной зависимости. Кривая делает бесконечно много витков вокруг полюса O . Эта кривая называется логарифмической спиралью. Внутри круга $r = a$ будет находиться часть спирали, соответствующая изменению угла от $-\infty$ до 0 , то есть интеграл, выражающий длину, будет несобственным. Имеем

$$|L| = \int_{-\infty}^0 \sqrt{2a^2 e^{2\varphi}} d\varphi = a\sqrt{2} \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 e^\varphi d\varphi = a\sqrt{2}.$$

Таким образом, хотя логарифмическая спираль будет делать бесконечно много витков вокруг полюса, но эти витки имеют достаточно малые длины, поэтому сумма их длин конечна.

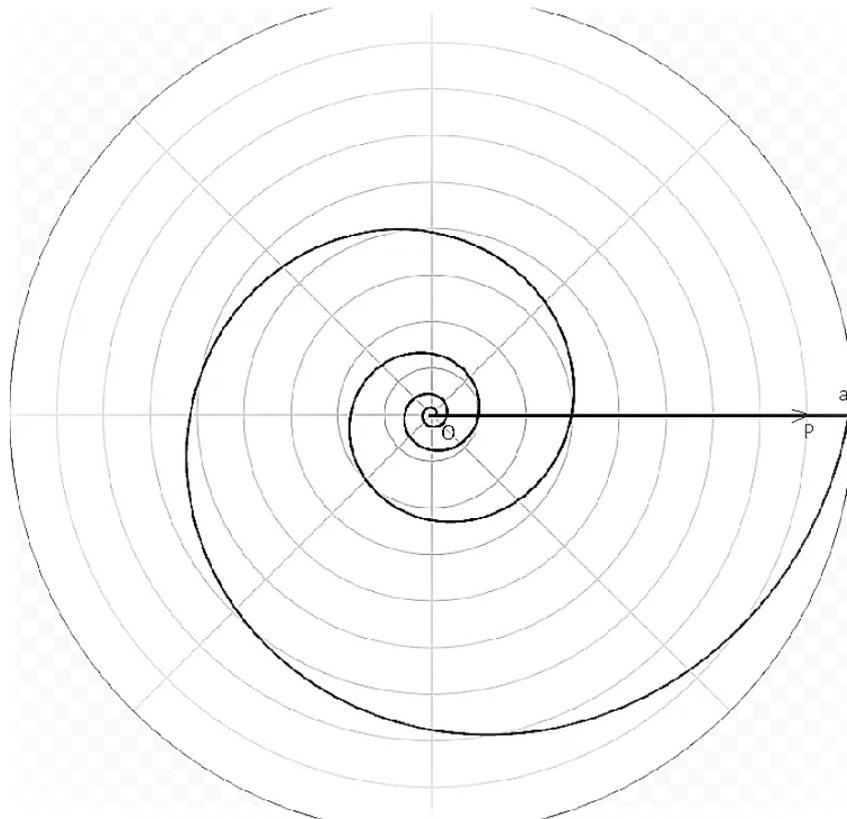


Рис. 5: Логарифмическая спираль

Приложения определённого интеграла (объёмы тел)

Объём тела можно определить аналогично тому, как определялась площадь фигуры на плоскости. Именно, сначала рассматриваются параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям, потом конечные объединения таких параллелепипедов,

называемые элементарными телами. Эти элементарные тела вписываются в тело и описываются вокруг тела. Если точная нижняя грань объёмов описанных тел совпадает с точной верхней гранью объёмов вписанных тел, то это общее значение называется объёмом тела. Мы не будем выписывать свойства объёмов, как делали это для площадей и длин кривых, а лишь укажем, как можно использовать определённые интегралы для нахождения объёмов.

Тела, имеющие объём будем называть *кубируемыми*. В качестве элементарных тел можно рассматривать и другие вписанные и описанные многогранники, только важно, чтобы каждый из таких многогранников был кубируем.

С помощью определённых интегралов можно находить также объёмы тел вращения вокруг различных осей.

Рассмотрим неотрицательную функцию $f \in R[a, b]$. Тогда объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, **вокруг оси Ox** , находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Укажем, как можно было бы получить эту формулу. Прямоугольники, площади которых образуют интегральные суммы при вращении вокруг оси Ox переходят в цилиндры (см. рисунок).

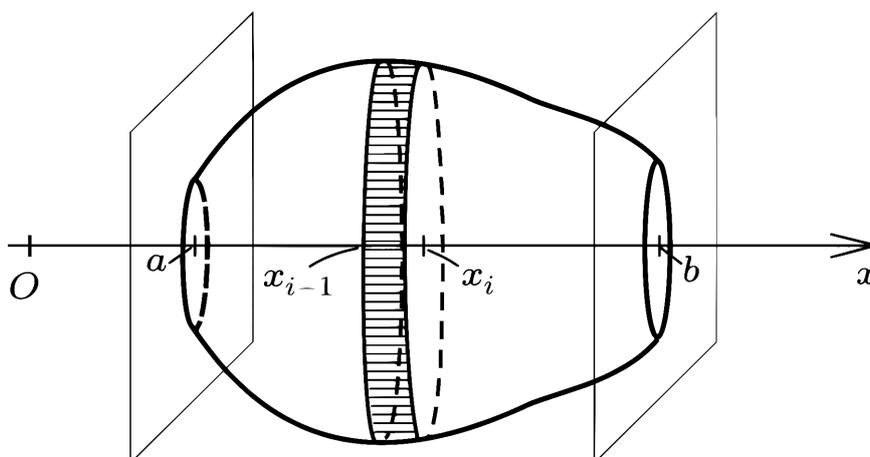


Рис. 6: Изображен один из получающихся цилиндров

Объём цилиндра на рисунке равен $V_{Ox} = \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, сумма объёмов всех цилиндров равна

$$\pi \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Можно доказать, что эта сумма лежит между объёмами вписанных и описанных многогранников, как и искомый объём тела вращения. Это так, так как при рассмотрении верхней и нижней сумм Дарбу мы получаем объёмы вписанных и описанных вокруг тела вращения объединений цилиндров, а такие объединения кубируемы, так как каждый цилиндр кубируем, что легко проверить. Так как $f \in R[a, b]$, то и $f^2 \in R[a, b]$, поэтому сумма объёмов цилиндров выше может восприниматься как интегральная сумма для интегрируемой функции f^2 , а тогда при стремлении диаметра разбиения к нулю эта сумма

стремится к интегралу

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Более подробно переходы обосновывать не будем.

Объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, **вокруг оси Oy** , находится по формуле

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Для объяснения этой формулы снова рассмотрим прямоугольники, суммы площадей которых являются римановыми суммами для функции f на $[a, b]$. Для простоты ограничимся случаем $b > a > 0$. Тогда всякий такой прямоугольник, вращаясь вокруг оси Oy , образует кольцевой цилиндр (см. рисунок).

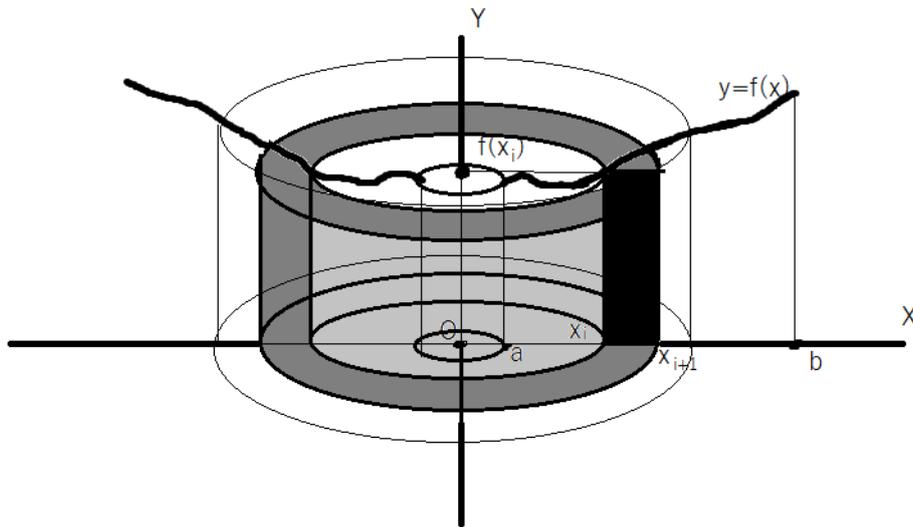


Рис. 7: Черный прямоугольник образует цилиндр

На этом рисунке черный прямоугольник, вращаясь вокруг Oy , образует цилиндр с кольцами в основании, выделенными серым. Высота этого цилиндра равна значению функции $f(\xi_{i+1})$ в некоторой точке отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Объём цилиндра равен разности объёмов цилиндра, образованного большим кругом основания, и цилиндра, образованного меньшим кругом основания:

$$V = \pi f(\xi_{i+1})(x_{i+1}^2 - x_i^2),$$

а сумма объёмов всех цилиндров, образованных прямоугольниками, площади которых составляют риманову сумму, равна

$$\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})(x_{i+1}^2 - x_i^2) = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1}) \frac{x_{i+1} + x_i}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Выберем в качестве разметки середины отрезков разбиения: $\xi_{i+1} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$. Функция $g(x) = xf(x)$ интегрируема на $[a, b]$, так как является произведением двух интегрируемых функций, поэтому риманова сумма

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \frac{x_{i+1} + x_i}{2} (x_{i+1} - x_i) = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{i+1} f(\xi_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

сходится к интегралу

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

при стремлении диаметра разбиения к нулю.

При этом можно показать, что такие римановы суммы всегда лежат между аналогичными суммами, образованными объёмами тел, полученных вращением вокруг оси Oy объединениями прямоугольников, соответствующих верхним и нижним суммам Дарбу.

Можно также показать, что объединения кольцевых цилиндров кубируемы, откуда и следует наличие объёма, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Oy . Так как интеграл всегда зажат между объёмами вписанных и описанных кубируемых тел, а эти объёмы могут отличаться сколь угодно мало, то интеграл $2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx$ и выражает искомый объём.

Рассмотрим ещё одну формулу. Пусть тело расположено в пространстве $Oxyz$ между плоскостями $x = a$ и $x = b$ и площадь его сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox , равна $S(x)$ ($a \leq x \leq b$).

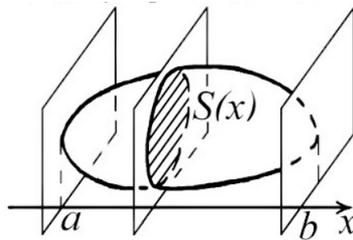


Рис. 8: Площадь сечения равна $S(x)$

Пусть функция S интегрируема на $[a, b]$, а само тело имеет объём V . Пусть также проекции фигур $S(x_1)$ и $S(x_2)$ на плоскость Oyz , где $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ содержатся одна в другой. Тогда

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Теперь приведём примеры применения всех формул.

Пример 2. 1) Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями

$$y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$$

Тогда

$$V_{Ox} = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1), \quad V_{Oy} = 2\pi \int_0^1 x e^x dx = 2\pi x e^x \Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 e^x dx = 2\pi.$$

2) Найдём объём общей части цилиндров $x^2 + z^2 \leq 1$ и $y^2 + z^2 \leq 1$. Эта общая часть не является телом вращения, поэтому лучше всего воспользоваться третьей формулой для объёма. В качестве оси, к которой мы берём перпендикулярные плоскости, секущие тело, возьмём ось Oz . Любая горизонтальная плоскость, пересекающая цилиндры, будет из сечь по параллельным прямым, так как прямолинейные образующие первого цилиндра

параллельны оси Oy , а второго – оси Ox . При этом сечение плоскостью $z = z_0$ не будет пустым множеством, если $-1 \leq z \leq 1$. Линии пересечения получаются из систем

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ z = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{1 - z_0^2}, \\ z = z_0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ z = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{1 - z_0^2}, \\ z = z_0, \end{cases}$$

то есть линии пересечения представляют собой равные отрезки, лежащие в плоскости $z = z_0$, два из которых параллельны оси Ox , а два других – оси Oy . Таким образом, сечение горизонтальной плоскостью представляет собой либо точку (при $z = \pm 1$), либо квадрат со стороной $2\sqrt{1 - z_0^2}$ (см. рисунок).

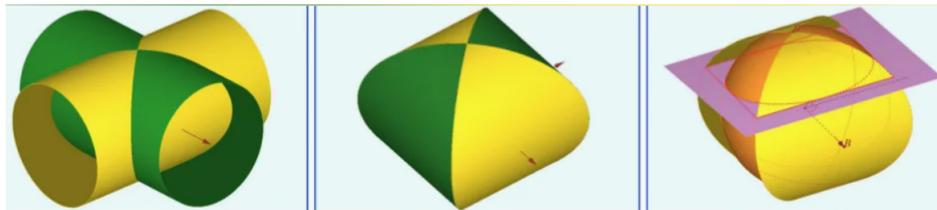


Рис. 9: Пересечение двух цилиндров, в сечении – квадрат

Площадь каждого квадрата равна $4(1 - z_0)^2$, поэтому по третьей формуле для объёма

$$V = 4 \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = 4 \left(z \Big|_{-1}^1 - \frac{z^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{16}{3}.$$

На этом мы заканчиваем курс интегрального исчисления функции одной переменной и на следующей лекции начнём изучение функций в многомерных пространствах.