Лекция 29

Метрические, нормированные и евклидовы пространства

Мы переходим к изучению отображений многомерных пространств. Эта тема обобщает то, что изучалось в первом семестре для функций одной переменной. Прежде всего необходимо определить, что такое расстояние между точками (в одномерном случае использовался просто модуль разности), что такое предел последовательности и так далее.

На будущее договоримся обозначать жирным шрифтом элементы векторного пространства.

Определение 1. *Рассмотрим произвольное множество X. Функция $\rho : X\times X \mapsto [0,+\infty)$ называется* ***метрикой****, если выполнены следующие три условия:*
1) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall x,y \in X$;
3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)\ \forall x,y,z \in X$.
Пара (X,ρ) называется ***метрическим пространством.***

Свойство 3 называется *неравенством треугольника.*

Метрика – это расстояние между элементами. Из определения следует, что метрическое пространство представляет собой произвольное множество с введённым на всевозможных упорядоченных парах элементов этого множества функцией, значение которой на данной паре считается расстоянием между элементами этой пары. Никакого дополнительного уточнения свойств множества X не требуется. Приведём примеры метрических пространств.

Пример 1. ***1)*** *Рассмотрим любое множество X. Если ввести на множестве пар элементов множества X функцию ρ, для которой $\rho(x,y) = 1$ при $x \ne y$ и $\rho(x,x) = 0$ при всех $x,y \in X$, то для неё выполнены все свойства метрики, поэтому (X,ρ) является метрическим пространством. Оно называется дискретным метрическим пространством, а сама метрика ρ называется дискретной. В частности, в качестве множества X можно взять множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$. В таком случае, если два числа не равны, то значение ρ на них равно 1, а в противном случае – нулю.*

2) *Рассмотрим множество $\mathbb{R}^2$ всех пар действительных чисел. Как известно, $\mathbb{R}^2$ является векторным пространством, поэтому его элементы будем обозначать жирным шрифтом. Если $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$, а $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)$, $x_i,y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, то можно ввести метрику так:*

$$\rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Напомним, что на лекциях по линейной алгебре мы ввели норму на пространстве $\mathbb{R}^2$, которая задавалась равенством $\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Легко видеть, что

$$\rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1$$

Все свойства метрики легко проверяются. Свойство 3, например, следует из неравенства треугольника для норм, которое доказывалось на линейной алгебре:

$$\rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|_1 \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|_1 + \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|_1 = \rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \rho_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$$

3) Можно, однако, ввести ввести на $\mathbb{R}^2$ метрику с помощью формулы, которая в аналитической геометрии задаёт расстояние между двумя точками с координатами (x_1, x_2) и (y_1, y_2), а именно

$$\rho_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Эта метрика получается из евклидовой нормы $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, которую мы ввели на линейной алгебре. То, что функция ρ_2 действительно является метрикой, проверяется, как и для ρ_1 в предыдущем пункте.

Таким образом, мы видим, что на одном и том же множестве можно задавать разные метрики.

В пунктах 2 и 3 мы использовали понятие векторного пространства, поэтому необходимо вспомнить это определение из курса линейной алгебры. Таким образом, множество X из определения метрического пространства рассматривалось с некоторыми ограничениями, так как мы указали что это не просто произвольное множество, а векторное пространство.

На всякий случай напомним определение нормы, которое давалось в курсе линейной алгебры.

Определение 2. *Пусть V – линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : V \mapsto [0, +\infty)$ называется **нормой**, если:*
1) $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ если и только если $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, то есть вектор $\boldsymbol{v}$ является нейтральным элементом векторного пространства V.
2) Для любого вещественного (или комплексного) числа λ и любого вектора $\boldsymbol{v} \in V$ выполнено равенство $\|\lambda \boldsymbol{v}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{v}\|$.
*3) Для любых $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ выполнено **неравенство треугольника** $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.*
*Линейное пространство V с введённой на нём нормой обозначается $(V, \|\cdot\|)$ и называется **нормированным пространством.***

Любое нормированное пространство можно сделать метрическим с метрикой ρ, задаваемой равенством

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Норма вводится только на векторных пространствах, поэтому класс нормированных пространств содержится в классе метрических.

Кроме того, в курсе линейной алгебры мы давали определение скалярного произведения и евклидова пространства. Напомним и эти определения.

Определение 3. *Пусть V – линейное пространство над полем вещественных чисел. Функция $(\cdot, \cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ называется **скалярным произведением**, если:*
1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \ge 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in V$ и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \; \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ (свойство симметричности).
3) $(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \; \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (свойство линейности).
*Линейное пространство V над полем $\mathbb{R}$ с введённым на нём скалярным произведением называется **евклидовым пространством.***

В курсе линейной алгебры доказывался следующий факт.

Предложение 1. *Пусть $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение на линейном пространстве V. Тогда функция $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ является нормой на V.*

На линейной алгебре было доказано, что если $V = \mathbb{R}^d$, вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_d)$, а вектор $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_d)$, скалярное произведение векторов задаётся формулой $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum\limits_{j=1}^{d} x_j y_j$, то метрика, задаваемая равенством

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j - y_j)^2},$$

как раз и задаётся нормой, порождаемой введённым скалярным произведением. Введённая метрика называется **евклидовой метрикой**.

При этом рассмотренная выше норма $\|\cdot\|_1$ не задаётся никаким скалярным произведением. Этот факт можно доказать в качестве упражнения, которое, однако, является непростым.

Напомним, что в евклидовом пространстве можно ввести понятие угла.

Определение 4. *Если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ – два ненулевых вектора евклидова пространства V, то можно определить угол φ между этими векторами, полагая, что*

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||}.$$

Нулевой вектор считается ортогональным любому вектору.

Косинус определён корректно в силу неравенства Коши – Буняковского, доказанного в курсе линейной алгебры. Таким образом, в евклидовом пространстве можно рассматривать все стандартные объекты обычной “школьной” геометрии. В дальнейшем нам пригодятся эти наблюдения.

Заметим, что в “школьной” геометрии мы сначала вводим понятия длины и угла, а потом уже через эти понятия вводим тригонометрические функции и так далее. В произвольном пространстве сначала необходимо ввести скалярное произведение, а уже затем можно, определяя новые понятия (длину и угол через косинус), рассматривать пространство, похожее на “школьное” множество обычных векторов. Дело в том, что в школе мы рассматриваем в качестве длины вектора как раз корень из суммы квадратов его координат, а такая норма, как мы теперь знаем, как раз и порождается скалярным произведением. “Школьное” скалярное произведение ставит в соответствие любой паре векторов произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Таким образом, в силу предложения выше, любое евклидово пространство может быть сделано нормированным, но не всякое нормированное пространство является евклидовым. Итак, мы видим, что самый широкий класс из изученных нами пространств составляют метрические, в этом классе строго содержится класс нормированных пространств, а в классе нормированных, в свою очередь, строго содержится класс евклидовых.

В дальнейшем мы будем изучать пространство $\mathbb{R}^d$ с евклидовой метрикой на нём.

Предел и сходимость в метрическом пространстве

Наша цель – определить предел функции в $\mathbb{R}^d$. Так как $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой является метрическим пространством, то некоторые определения и факты мы будем формулировать для произвольных метрических пространств, потому что, будучи верными в произвольных метрических пространствах, эти определения и факты в частности будут верны и в $\mathbb{R}^d$. Введём несколько новых понятий.

Определение 5. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.*

1) Множество $B_r(x_0) := \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$ называется ***открытым шаром*** *радиуса r с центром в точке x_0. Если в определении взять нестрогое неравенство $\rho(x, x_0) \leq r$, то получим* ***замкнутый шар*** *радиуса r с центром в точке x_0.*

Окрестностью точки x_0 называется называется любой открытый шар с центром в этой точке.

В случае $X = \mathbb{R}^d$ и евклидовой метрики открытый шар с центром в точке

$$\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_d^0)$$

задаётся неравенством

$$(\rho(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}))^2 = \sum_{k=1}^{d} (x_k - x_k^0)^2 < r,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$.

2) Последовательность точек $\{x_n\} \subset X$ сходится к точке $x \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon > 0 : \; \forall n > N_\varepsilon \; \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

3) Точка x называется ***предельной точкой*** *множества $M \subset X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

Точка Точка x называется ***изолированной точкой*** *множества $M \subset X$, если она не является предельной.*

Точка x называется ***граничной точкой*** *множества $M \subset X$, если в любой её окрестности есть как точки из M, так и точки не из M.*

4) Множество $A \subset X$ называется открытым, если $\forall a \in A \; \exists \delta > 0 : \; B_\delta(a) \subset A$.

5) Множество $M \subset X$ замкнуто, если $X \setminus M$ открыто.

Примером открытого множества является интервал в $\mathbb{R}$ или любой открытый шар, а примером замкнутого множества служит замкнутый шар или отрезок в $\mathbb{R}$. Полуинтервал даёт пример множества, не являющегося ни открытым, ни замкнутым. (проверьте!).

Замкнутые множества можно описать и по-другому.

Теорема 1. *Множество M является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. Необходимость. Дано, что множество M, содержащееся в X, замкнуто. Тогда множество $X \setminus M$ открыто. Это значит, что если точка $a \in X \setminus M$, то найдётся её окрестность $B_\delta(a)$, целиком содержащаяся в $X \setminus M$, то есть в $B_\delta(a)$ нет точек из M, поэтому a не может быть предельной точкой множества M. Рассуждение верно для любой точки $a \in X \setminus M$, поэтому все предельные точки множества M принадлежат M.

Достаточность. Если множество M содержит все свои предельные точки, то любая точка множества $X \setminus M$ имеет окрестность, не пересекающуюся с M, а тогда эта окрестность целиком лежит в $X \setminus M$, то есть множество $X \setminus M$ открыто, поэтому множество M замкнуто. □

Упражнение 1. Докажите, что множество M замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.