Лекция 30

Предел и сходимость в метрическом пространстве (продолжение)

В этом разделе мы изучим свойства пределов, аналогичные тем свойствам, которые проходили, например, для последовательностей на прямой. Однако, конечно, не все свойства можно перенести на последовательности в метрических и нормированных пространствах. Причина в том, что в произвольном метрическом пространстве мы не можем даже складывать элементы, а если дополнительно известно, что множество X является векторным пространством, то у нас появляется возможность складывать элементы из X и умножать их на числа, но мы не можем перемножать эти элементы и делить их друг на друга. Поэтому от свойств пределов последовательностей на $\mathbb{R}$ остаются немногие, однако появляются другие свойства, важные именно из-за того, что теперь речь не о последовательностях на вещественной прямой.

Предложение 1. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательности в нём, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, $x, y \in X$. Тогда:*
1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$;
2) x является единственным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ***(единственность предела);***
3) существует шар в метрическом пространстве, содержащий все элементы последовательности $\{x_n\}$ ***(ограниченность последовательности, имеющей предел)****.*

Доказательство. **1)** Так как $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to +\infty$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное n, начиная с которого $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ и $\rho(y_n, y) < \varepsilon$. При таких n воспользуемся неравенством треугольника:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leq \rho(y_n, y) + \rho(x_n, x) < 2\varepsilon,$$

откуда следует первое утверждение. При этом неравенства

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| \leq \rho(y_n, y) \text{ и } |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x)$$

следуют из неравенства треугольника для метрик.

2) Если у последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ два предела, то $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \rho(x_n, x_n) \neq 0$, то есть получаем противоречие с первым пунктом.

3) При $\varepsilon = 1$ $\exists N : \ \forall n > N \ x_n \in B_1(x)$. Пусть $r = \max\{\rho(x_1, x), \ ..., \ \rho(x_{N-1}, x), 1\} + 1$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ содержится в шаре $B_r(x)$. □

В следующем предложении мы докажем арифметические свойства пределов в нормированных пространствах. Ещё раз отметим, что, кроме суммы элементов последовательностей векторов и умножения на этих элементов на числа (то есть стандартных операций в векторном пространстве), никакие другие свойства мы рассматривать не можем, так как произведение или частное элементов последовательностей можно изучать только при работе с обычными числами, а сейчас речь идёт об элементах произвольных нормированных и метрических пространств.

Предложение 2. ***(Арифметика пределов).*** *Пусть $(V, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство, $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательности в нём, $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Пусть также $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность в $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha_0$. Тогда:*
1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \alpha_0 \boldsymbol{x}$.

Доказательство. **1)** Так как $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$ при $n \to +\infty$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное n, начиная с которого $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon$ и $\|\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\| < \varepsilon$. Из неравенства треугольника имеем:

$$\|\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\| \leq \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{y}\| < 2\varepsilon,$$

откуда получаем первое утверждение.

2) Так как $\alpha_n \to \alpha_0$ то при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное n, начиная с которого $|\alpha_n - \alpha_0| < \varepsilon$, поэтому при всех таких n имеем, в силу неравенства треугольника:

$$\|\alpha_n \boldsymbol{x}_n - \alpha_0 \boldsymbol{x}\| \leq \|\alpha_n \boldsymbol{x}_n - \alpha_n \boldsymbol{x}\| + \|\alpha_n \boldsymbol{x} - \alpha_0 \boldsymbol{x}\| = |\alpha_n| \cdot \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| + |\alpha_n - \alpha_0| \cdot \|\boldsymbol{x}\| < C\varepsilon$$

при некотором $C > 0$, так как $|\alpha_n|$ ограничена в силу сходимости. □

Будем теперь рассматривать сходимость последовательностей в нормированных пространствах. Мы можем рассматривать последовательности, состоящие из элементов нормированных пространств, как в первом семестре делали это с числовыми последовательностями. Отметим, что нас, в первую очередь, будут интересовать арифметические пространства $\mathbb{R}^d$. В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений для координат элементов последовательности: если $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^d$, то $\boldsymbol{x}_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_d^{(n)})$.

Предложение 3. *Пусть $V = \mathbb{R}^d$, и на V введено скалярное произведение, порождающее евклидову норму и метрику. Последовательность векторов $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к элементу $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to+\infty} x_i^{(n)} = x_i,\ i = 1, 2, ..., d$, где x_i является $i-$й координатой вектора $\boldsymbol{x}$.*

Доказательство. Имеем следующие оценки:

$$\max_{i=1,\dots,d} |x_i^{(n)} - x_i| \leq \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i^{(n)} - x_i)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{d \max_{i=1,\dots,d} (x_i^{(n)} - x_i)^2} = \sqrt{d} \max_{i=1,\dots,d} |x_i^{(n)} - x_i|.$$

Левое неравенство означает, что из сходимости в $\mathbb{R}^d$ (по норме) следует покоординатная сходимость, а правое – что из покоординатной сходимости следует сходимость в $\mathbb{R}^d$. □

Последнее предложение допускает такую формулировку: *сходимость в $\mathbb{R}^d$ равносильна покоординатной сходимости.*

Предел функции

Всюду в этом разделе мы считаем, что X с метрикой ρ_X и Y с метрикой ρ_Y – метрические пространства, a – предельная точка в X.

Определение 1. ***(Определение предела по Коши).*** *Точка $A \in Y$ является пределом функции $f : X \setminus \{a\} \mapsto Y$ при $x \to a$ $(x \in X)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ $f(x) \in B_\varepsilon(A)$. Равносильная запись:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < \rho_X(x, a) < \delta\ \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon.$$

Определение 2. ***(Определение предела по Гейне).*** *Точка $A \in Y$ является пределом функции $f : X \setminus \{a\} \mapsto Y$ при $x \to a$ $(x \in X)$, если для любой такой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества X, что $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.*

Сейчас мы докажем эквивалентность этих определений. Чаще нам будет полезно определение по Гейне.

Теорема 1. *Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.*

Доказательство относится к материалу, который нужно знать на пять. В доказательстве используются обозначения определений.

Доказательство. Коши $\Rightarrow$ Гейне. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества X, которая стремится к a при $n \to +\infty$ $(x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N})$. Начиная с некоторого $N > 0$ при всех $n > N$ выполнены неравенства $0 < \rho_X(x_n, a) < \delta$, откуда следует в силу определения по Коши, что $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$ при всех $n > N$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$, поэтому выполнено определение сходимости по Гейне.

Гейне $\Rightarrow$ Коши. Предположим, что предел по Коши не существует, то есть найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такая точка x_δ, что $0 < \rho_X(x_\delta, a) < \delta$, но при этом $\rho_Y(f(x_\delta), A) \geq \varepsilon$. Пусть $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $v_n = x_{1/n}$. Так как $0 < \rho_X(x_\delta, a) < 1/n \to 0$, $n \to +\infty$, то последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ удовлетворяет всем условиям определения по Гейне, но $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq A$. Противоречие. □

Предложение 4. ***(Единственность предела).*** *Если $A \in Y$ является пределом функции $f : X \setminus \{a\} \mapsto Y$ при $x \to a$ $(x \in X)$, то этот предел единственен.*

Доказательство. Если бы у функции f существовало два разных предела A и B при $x \to a$, то в силу определения по Гейне для любой такой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества X, что $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, были бы выполнены равенства $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = B$, откуда в силу одного из предложений выше мы бы получили

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \rho_Y(f(x_n), f(x_n)) = \rho_Y(A, B) \neq 0.$$

Пришли к противоречию. □

Предложение 5. ***(Арифметика пределов).*** *Пусть (X, ρ_X) – метрическое пространство, a – предельная точка в X. Пусть заданы функции $f, g : X \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{R}^d$. Пусть также $\alpha : X \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha_0$. Тогда:*
1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;
2) $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) f(x)) = \alpha_0 A$.

Доказательство. Применяя арифметику пределов для последовательностей и определения предела функции по Гейне, сразу получаем оба утверждения. Докажем, например, первое. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества X, которая стремится к a при $n \to +\infty$ $(x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N})$. Тогда $f(x_n) + g(x_n) = A + B$ в силу арифметики пределов для последовательностей и определения предела по Гейне. но это верно для любой последовательности, поэтому первый пункт верен в силу определения предела по Гейне. □

Предложение 6. ***(Предел сложной функции).*** *Пусть* (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) *и* (Z, ρ_Z) – *метрические пространства,* a – *предельная точка в* X, b – *предельная точка в* Y. *Пусть* $f : X\backslash\{a\} \mapsto Y \setminus \{b\}$, $g : Y\backslash\{b\} \mapsto Z$, *а также* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Доказательство. Для любой такой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества X, что $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$, имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$ и $f(x_n) \neq b$. Поэтому и $\lim\limits_{n\to+\infty} g(f(x_n)) = c$, для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ с указанными выше свойствами, то есть для функции $g \circ f : X \setminus \{a\} \mapsto Z$ выполнено определение предела по Гейне. □

Предложение 7. ***(Отделимость).*** *Пусть* (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – *метрические пространства,* a – *предельная точка в* X, *задана функция* $f : X\backslash\{a\} \mapsto Y$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. *Тогда:*
1) *при всех* $\varepsilon > 0$ *в* X *существует такой шар* $B_\delta(a)$, *что* $f(x) \in B_\varepsilon(A)$ *при* $x \in B_\delta(a)\backslash\{a\}$;
2) *для любого* $B \in Y$, $B \neq A$, *в* X *существует такой шар* $B_\delta(a)$, *что* $f(x) \notin B_{r/2}(B)$ *при всех* $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, *где* $r = \rho_Y(A, B)$.

Доказательство. **1)** Непосредственно следует из определения предела по Коши.

2) Пусть $\varepsilon = r/2$. Тогда в X существует такой шар $B_\delta(a)$, что $f(x) \in B_{r/2}(A)$ при $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$. Остаётся только заметить, что $B_{r/2}(A) \cap B_{r/2}(B) = \varnothing$. □

Непрерывность функции в точке

Теперь точка $a \in X$, непрерывность в которой мы будем изучать, необязательно является предельной, а отображение будет определено в этой точке. не

Определение 3. ***(Непрерывность по Гейне).*** *Пусть* (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – *метрические пространства. Отображение* $f : X \mapsto Y$ *называется непрерывным в точке* $a \in X$, *если для любой такой последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *элементов множества* X, *что*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a,$$

выполнено равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Упражнение 3. Запишите это определение для случая $X = \mathbb{R}^d$, а $Y = \mathbb{R}^m$, если на обоих пространствах рассматриваются евклидовы метрики.

Предложение 8. ***(Непрерывность сложной функции).***
Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y), (Z, ρ_Z) – *метрические пространства, функция* $f : X \mapsto Y$ *непрерывна в точке* $a \in X$, *функция* $g : Y \mapsto Z$ *непрерывна в точке* $f(a)$. *Тогда функция* $g \circ f : X \mapsto Z$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство. Это утверждение прямо следует из определения непрерывности и теоремы о пределе сложной функции, в которой можно считать $f(a) = b$. □

Предложение 9. ***(Локальные свойства непрерывных функций).***
Если функции $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ *и* $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, *то функции* $f + g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ *и* $f \cdot g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ *также непрерывны в этой точке.*

Доказательство. Это утверждение прямо следует из определения непрерывности по Гейне и арифметики пределов для функций. □

Теперь сформулируем равносильное определение непрерывности.

Определение 4. ***(Непрерывность по Коши).*** *Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \mapsto Y$ называется непрерывным в точке $a \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых таких $x \in X$, что $\rho_X(x, a) < \delta$, выполнено неравенство $\rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

Равносильность определений по Коши и Гейне следует из равносильности этих определений для пределов.

Непрерывность функции на множестве

Обратим внимание, что мы изучаем новые объекты также, как в первом семестре: сначала ввели понятие пространства, на котором определяется отображение, как в первом семестре вводили понятие вещественного числа, затем изучили предел последовательности и его свойства, потом обсудили предел функции и непрерывность функции в точке. Теперь необходимо обсудить свойства отображений непрерывных на множестве. Здесь мы ограничимся только определениями и формулировками.

Определение 5. *Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным на множестве $M \subseteq X$, если оно непрерывно в каждой точке множества M.*

Мы изучали свойства функций, непрерывных на отрезке, поэтому теперь мы хотим обобщить эти результаты на случаи более общих пространств и отображений на них. Для этого нам нужно обобщить понятие отрезка, поэтому дадим следующие определения.

Определение 6. *Система множеств $S = \{A\}$ называется покрытием множества B, если $B \subseteq \bigcup\limits_{A \in S} A$.*

Другими словами, для любой точки b множества B найдётся такое множество A, принадлежащее системе S, что $b \in A$. Система множеств – это некоторый набор множеств, то есть множество, элементами которого являются множества. Подмножества системы множеств S будем называть подсистемой системы S.

Определение 7. *Подмножество M метрического пространства X называется компактом, если из всякого покрытия M открытыми множествами можно выбрать конечный набор множеств, также образующий покрытие множества M.*

Отметим, что, например, отрезок или конечное объединение отрезков на прямой, замкнутый шар в $\mathbb{R}^3$ являются компактами, а интервал на прямой или открытый шар в $\mathbb{R}^3$ компактами не являются.

Пример 1. ***1)*** *Система интервалов $S_1 = \{(0, 1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ не покрывает отрезок $[0, 1]$, так как точки 0 и 1 не содержатся ни в каком из этих интервалов.*

Система $S_2 = \{(-\frac{1}{n}, 1, 2 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ покрывает отрезок $[0, 1]$. Можно выбрать конечную подсистему интервалов, покрывающую этот отрезок. Например, можно взять подсистему из одного интервала $(-0,01, 1,19)$, так как это интервал содержит отрезок $[0, 1]$.

2) *Система S_1 покрывает интервал $(0, 1)$, но нельзя выбрать из S_1 конечную подсистему, также покрывающую интервал $(0, 1)$ (докажите это в качестве упражнения).*

Для компактов в $\mathbb{R}^d$ справедлив следующий критерий компактности (без доказательства).

Теорема 2. *Подмножество M пространства $\mathbb{R}^d$ является компактом тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Ограниченность означает, что множество содержится в некотором шаре из $\mathbb{R}^d$.

Отметим, что теоремы Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях и теорема Гейне-Кантора о равномерной непрерывности могут быть обобщены на компакты в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 3. ***(Первая теорема Вейерштрасса)**. Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $M \subset \mathbb{R}^d$. Тогда множество её значений $\{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in M\}$ ограничено.*

Теорема 4. ***(Вторая теорема Вейерштрасса)**. Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $M \subset \mathbb{R}^d$. Тогда существуют точки $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$, такие, что*

$$f(\boldsymbol{a}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in M} f(\boldsymbol{x}),\ f(\boldsymbol{b}) = \sup_{\boldsymbol{x} \in M} f(\boldsymbol{x}).$$

Определение 8. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве $M \subseteq X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех таких $x, y \in M$, что $\rho_X(x - y) < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Теорема 5. ***(Теорема Гейне – Кантора)**. Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $M \subset \mathbb{R}^d$. Тогда она равномерно непрерывна на этом компакте.*

Множество значений непрерывной на промежутке (то есть, интервале, полуинтервале, отрезке, луче или всей прямой) функции есть снова промежуток. Обобщим и этот факт.

Определение 9. *Множество M метрического пространства (X, ρ) называется связным, если не существует таких открытых множеств A и B этого пространства, что*

$$A \cap B = \varnothing,\ A \cap M \neq \varnothing,\ B \cap M \neq \varnothing,\ M \subset A \cup B.$$

Теорема 6. *Область значений определённого и непрерывного на связном множестве отображения является связным множеством.*