Лекция 34

Теорема о неявной функции

Прежде всего, рассмотрим пример. Пусть мы имеем уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$, задающее координатной плоскости окружность. При каждом фиксированном x из отрезка $[-1, 1]$ можно решить это уравнение относительно y. Если при этом установить, какое из значений y выбирать после решения, если решений получилось несколько, то тем самым определяется функция y от x. В таких случаях говорят, что задана **неявная функция** $y = f(x)$. Разумеется, таких зависимостей можно выбрать много. Например, можно потребовать, чтобы при всех рациональных x искалось только неотрицательное значение y. При этом при иррациональных x мы можем выбирать произвольно либо положительное значение, либо отрицательное. Тогда можно определить бесконечно много разных функций, полагая, например, что отрицательное значение принимается для данной функции ровно в одной иррациональной точке. Таким образом, наше уравнение задаёт бесконечно много неявных функций.

Если дополнительно потребовать, чтобы зависимость y от x была непрерывной, то останутся всего две возможности:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ и } y = -\sqrt{1 - x^2},$$

причём в достаточно малой окрестности всех, кроме двух, точек нашей окружности однозначно можно выделить или часть с плюсом, или часть с минусом, в зависимости от расположения точки на окружности (см. рисунок, на котором выделенная окрестность точки (x_0, y_0) содержит часть окружности, записываемую в виде явной функциональной зависимости $y = \sqrt{1 - x^2}$).

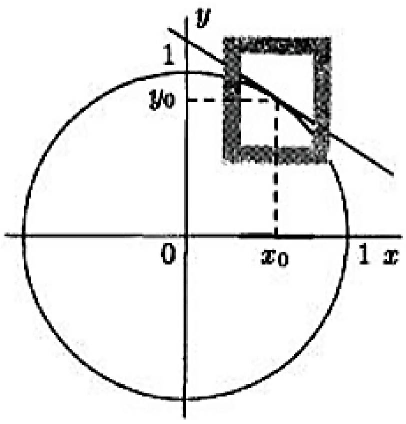

Рис. 1: Окрестность точки (x_0, y_0) содержит часть графика $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Если рассмотреть функцию

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

то для неё окружность $x^2 + y^2 - 1 = 0$ является линией 0-уровня. При этом часть, которая может быть выражена в виде явной непрерывной функции $y = f(x)$ невозможно выделить ни в какой окрестности точек $(1, 0)$ и $(-1, 0)$.

Можно сделать предположение, что в этих двух точках функция F имеет какие-то свойства, которыми не обладает во всех иных точках окружности. Действительно, только в этих точках касательная к линии уровня вертикальна, а во всех остальных уравнение касательной допускает явное выражение y через x. Так как в достаточно малой окрестности функция мало отличается от своей касательной, то и уравнение окружности допускает явное и однозначное выражение x через y.

Теорема ниже как раз и даёт условия, при которых часть линии 0-уровня функции двух переменных может быть рассмотрена в качестве графика явной функции $y = f(x)$.

Теорема 1. ***(Теорема о неявной функции).*** *Пусть:*

1) *функция $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках некоторой окрестности Ω точки $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$;*

2) *$F(x_0,\ y_0) = 0$;*

3) *F'_x и F'_y непрерывны во всех точках окрестности Ω;*

4) *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.*

Тогда существует единственная такая функция $y = f(x)$, определённая в некоторой δ-окрестности точки x_0, что:

1) *$f(x_0) = y_0$;*

2) *для всех точек x из этой δ-окрестности справедливо равенство $F(x,\ f(x)) = 0$;*

3) *функция f дифференцируема в этой δ-окрестности и*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)|_{y=f(x)}}{F'_y(x, y)|_{y=f(x)}}.$$

Отметим, что как раз ненулевое значение частной производной по y в точке означает, что касательная наклонна.

Доказательство. Сразу отметим, что доказательство осознавать проще, если параллельно с текстом изучать рисунок 1 и сразу находить все вводимые ниже обозначения на рисунке. Будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$, так как в противном случае можно перейти

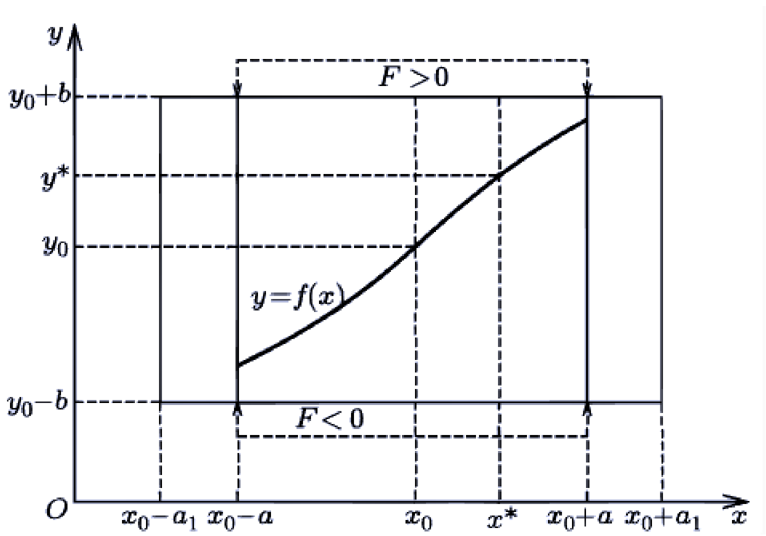

Рис. 2: На рисунке выделен график $y = f(x)$, а $y^* = f(x^*)$.

к рассмотрению функции $-F$ и провести все рассуждения ниже. В силу непрерывности F'_y во всей окрестности Ω и положительности в точке (x_0, y_0) найдутся такие $a_1 > 0$ и $b > 0$, что минимальное значение функции F'_y больше некоторого положительного m в прямоугольнике

$$P = \{(x, y) :\ x_0 - a_1 \leq x \leq x_0 + a_1,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}.$$

Так как F'_y положительна на P, функция $F(x_0, y)$ возрастает на отрезке $[y_0 - b,\ y_0 + b]$. Так как $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 - b) < 0$, а $F(x_0, y_0 + b) > 0$. Из непрерывности функции F в области Ω следует, что существует такое $a > 0$, что $F(x, y_0 - b) < 0$, а $F(x, y_0 + b) > 0$ при всех $x \in [x_0 - a,\ x_0 + a]$. Тогда при любом фиксированном $x \in [x_0 - a,\ x_0 + a]$ функция

$$g(y) = F(x, y)$$

возрастает на отрезке $[y_0 - b,\ y_0 + b]$, причём $g(y_0 - b) < 0$, а $g(y_0 + b) > 0$. Поэтому при каждом фиксированном $x \in [x_0 - a,\ x_0 + a]$ существует единственная такая точка $y = f(x)$, что $g(f(x)) = F(x, f(x)) = 0$ (на рисунке 1, например, отмечена точка x^*, которой соответствует такая точка $y^* = f(x^*)$, что что $F(x^*, y^*) = 0$). При этом по построению $y_0 = f(x_0)$, так как $F(x_0, y_0) = 0$. Единственность построенной функции f вытекает из её построения, так как на каждом вертикальном отрезке (то есть при фиксированном x) из-за возрастания по y есть только одно значение y, при котором $F(x, y) = 0$. Если теперь взять в качестве требуемой δ-окрестности любой интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset [x_0 - a,\ x_0 + a]$ ($\delta > 0$), то функция f на этом интервале и будет искомой. Нам осталось лишь доказать, что она дифференцируема на интервале $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ и вывести формулу, написанную в последнем пункте формулировки.

Итак, пусть точки c и x принадлежат интервалу $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. Пусть $y_c = f(c)$, а $y = f(x)$. Тогда $F(c, y_c) = F(x, y) = 0$, поэтому для функции

$$h(t) = F(c + t(x - c),\ y_c + t(y - y_c))$$

выполняются равенства $h(0) = h(1) = 0$, а также h непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема внутри этого отрезка в силу существования обеих частных производных F, причём по теореме о производной сложной функции

$$h'(t) = F'_x(c + t(x - c),\ y_c + t(y - y_c))(x - c) + F'_y(c + t(x - c),\ y_c + t(y - y_c))(y - y_c).$$

Таким образом, к функции h на отрезке $[0, 1]$ применима теорема Ролля, то есть существует такое число $\theta \in (0, 1)$, что $h'(\theta) = 0$. Тогда

$$\frac{y - y_c}{x - c} = -\frac{F'_x(c + \theta(x - c),\ y_c + \theta(y - y_c))}{F'_y(c + \theta(x - c),\ y_c + \theta(y - y_c))}.$$

Обе частные производные функции F непрерывны в прямоугольнике P, поэтому, полагая $M = \max\limits_P |F'_x(x, y)|$ и вспоминая, что $F'_y(x, y) \geq m > 0$ на P, получаем оценку

$$\left|\frac{y - y_c}{x - c}\right| < \frac{M}{m}.$$

Таким образом, величина $\frac{y - y_c}{x - c}$ ограничена, а тогда

$$f(x) - f(c) = y - y_c = (x - c)\frac{y - y_c}{x - c} \to 0$$

при $x \to c$. Тем самым доказана непрерывность функции f в любой точке c интервала $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

Воспользовавшись теперь непрерывностью обеих частных производных функции F, получим, что

$$\frac{y - y_c}{x - c} = -\frac{F'_x(c + \theta(x - c),\ y_c + \theta(y - y_c))}{F'_y(c + \theta(x - c),\ y_c + \theta(y - y_c))} \to -\frac{F'_x(c,\ y_c)}{F'_y(c,\ y_c)} = -\frac{F'_x(c,\ f(c))}{F'_y(c,\ f(c))}$$

при $x \to c$, то есть $f'(c) = -\frac{F'_x(c,\ f(c))}{F'_y(c,\ f(c))}$.

Таким образом, дифференцируемость функции f на интервале $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ доказана. $\square$

Вернувшись к рассуждениям перед теоремой, отметим, что $F'_y(x,y) = 2y$ не равна нулю во всех точках, кроме тех, к которых $y = 0$, поэтому во всех точках с ненулевой ординатой действительно можно выразить явно y через x. Согласно теореме, в этом случае

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,\ f(x))}{F'_y(x,\ f(x))} = -\frac{2x}{2f(x)} = -\frac{x}{f(x)}.$$

Обе функции, $f(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ как раз и имеют такие производные, в чём можно убедиться с помощью непосредственного вычисления.

Случай функции многих переменных

Для краткости введём следующие обозначения:

$$(\bar{x},\ y) = (x_1,\ ...,\ x_{d-1},\ y) \in \mathbb{R}^d.$$

Сформулируем теорему о неявной функции для функции многих переменных.

Теорема 2. ***(Общая теорема о неявной функции).*** *Пусть:*

1) *функция $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках некоторой окрестности Ω точки $(\bar{x}_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^d$;*

2) $F(\bar{x}_0,\ y_0) = 0$;

3) $F'_{x_1},\ ...,\ F'_{x_{d-1}}$ *и* F'_y *непрерывны во всех точках окрестности* Ω;

4) $F'_y(\bar{x}_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует единственная такая функция $y = f(\bar{x})$, определённая в некоторой δ-окрестности точки $\bar{x}_0$, что:

1) $f(\bar{x}_0) = y_0$;

2) *для всех точек $\bar{x}$ из этой δ-окрестности справедливо равенство* $F(\bar{x},\ f(\bar{x})) = 0$;

3) *функция f имеет все частные производные в этой δ-окрестности и*

$$f'_{x_i}(\bar{x}) = -\frac{F'_{x_i}(\bar{x},y)|_{y=f(\bar{x})}}{F'_y(\bar{x},y)|_{y=f(\bar{x})}}\ (i = 1,\ ...,\ d-1).$$

Доказательство. Построение функции ведётся тем же способом, что и в доказательстве предыдущей теоремы, только прямоугольник P теперь заменяется на параллелепипед размерности d, а итоговая δ-окрестность будет являться окрестностью в пространстве размерности $d-1$.

Для доказательства формулы для частной производной по переменной x_i после этого поступаем так: фиксируем все переменные, кроме x_i и y и повторяем доказательство дифференцируемости из предыдущей теоремы. $\square$

Переход к системе неявных функций

Для лучшего понимания следующей теоремы прежде всего обсудим пример.

Пример 1. *Пусть дано отображение $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое функциями*

$$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{cases}$$

и зададимся целью выразить переменные x_1, x_2 через остальные переменные, то есть найдём такие функции f_1 и f_2, что $x_1 = f_1(x_3, x_4)$, а $x_2 = f_2(x_3, x_4)$.

Дело в том, что эта система задаёт связь между переменными x_1, x_2, x_3 и x_4, а эту связь удобно изучать, имея какое-то явно заданное отображение пространства одних переменных в пространство других. При этом мы хотим, чтобы отображение f действовало из своей области определения в область значений, содержащуюся в$\mathbb{R}^2$, как и исходное отображение F.

Для этого систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3 - 2x_4, \\ x_1 - x_2 = 6x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -A^{-1}B \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Для того, чтобы удалось так выразить первые две переменные, необходимо, чтобы матрица A была невырожденной. Отображение F линейное, поэтому оно непрерывно дифференцируемо, то есть все его координатные функции дифференцируемы, а их частные производные непрерывны в любой точке, и для его матрицы Якоби в любой точке имеем равенство

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Первые два столбца этой матрицы образуют матрицу A, а два последних столбца составляют матрицу B.

Таким образом, мы задали новое отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с координатными функциями f_1 и f_2.

Здесь мы заранее выбрали те переменные, которые хотим выразить как функции от остальных переменных. При этом выразить переменные x_3 и x_4 через x_1 и x_2 нельзя, так как матрица B вырождена. Таким образом, не все наборы переменных можно выражать через те, что не входят в эти наборы.

Представим себе ситуацию, что заданы более сложные уравнения, а не линейные. В этом случае возможно выражение одних переменных через другие, то есть задание отображения, если выполнены некоторые условия, которые мы обсудим ниже.

Теперь попробуем для более общих случаев выяснить, когда можно выражать часть переменных через все остальные, то есть когда система уравнений задаёт отображение, которое будем называть неявным.

Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и будем считать, что все его координатные функции дифференцируемы, а их частные производные непрерывны в некоторой окрестности заданной точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Такое отображение назовём **непрерывно дифференцируемым в данной точке.** Матрица Якоби этого отображения в точке $\bar{x}$ имеет m строк и n столбцов. Будем считать, что $m \leq n$. Тогда если эта матрица имеет максимальный ранг (то есть градиенты функций F_i $(i = 1, \ ..., \ m)$ являются линейно независимыми), то говорят, что **отображение F невырождено в точке $\bar{x}$.** Выберем любые m столбцов матрицы Якоби. Её определитель называется **якобианом** отображения F точке $\bar{x}$. Таким образом, у отображения F в рассматриваемом случае C_n^m якобианов, а отображение является невырожденным, если хотя бы один из якобианов не равен нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда $n = m+p$, а точку пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать так:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, \ ..., \ x_p, \ y_1, \ ..., \ y_m),$$

то есть $\bar{x} = (x_1, \ ..., \ x_p)$, а $\bar{y} = (y_1, \ ..., \ y_m)$.

Запишем матрицу Якоби отображения F в некоторой точке $(\bar{a}, \bar{b})$:

$$J_F(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}((\bar{a}, \bar{b}) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_p}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}((\bar{a}, \bar{b}) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{a}, \bar{b}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}((\bar{a}, \bar{b}) & ... & \frac{\partial F_2}{\partial x_p}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}((\bar{a}, \bar{b}) & ... & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\bar{a}, \bar{b}) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}((\bar{a}, \bar{b}) & ... & \frac{\partial F_m}{\partial x_p}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{a}, \bar{b}) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}((\bar{a}, \bar{b}) & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{a}, \bar{b}) \end{pmatrix}.$$

Матрицу, состоящую из p первых столбцов матрицы $J_F(\bar{a}, \bar{b})$ обозначим $J_F(\bar{x})$, а матрицу, состоящую из m последних столбцов матрицы $J_F(\bar{a}, \bar{b})$ – через $J_F(\bar{y})$. Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать теорему о неявном отображении, то есть указать, при каких условиях система

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ ..., \ x_p, y_1, \ ..., \ y_m) = 0, \\ ... \\ F_m(x_1, \ ..., \ x_p, y_1, \ ..., \ y_m) = 0 \end{cases}$$

разрешима относительно переменных $y_1, \ ..., \ y_m$ как функций от переменных $x_1, \ ..., \ x_p$ и что можно сказать о дифференцируемости этих функций.

Ситуация та же, что и с неявной функцией: в окрестности некоторой точки мы хотим найти явное отображение, равносильное системе выше.

Отметим, что в случае линейных отображений мы уже проделали всё в примере и там рассуждения верны на всём пространстве, а в общем случае рассуждения можно проводить в некоторых окрестностях точек, в которых отображение дифференцируемо, так как тогда оно локально мало отличается от комбинации линейного отображения и сдвига, то есть от аффинного отображения.

Теорема 3. ***(Теорема о неявном отображении).*** *Пусть $n = m + p, \ p > 0$ (все числа натуральные) и:*

1) *отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ невырождено в точке*

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (a_1, \ ..., \ a_p, \ b_1, \ ..., \ b_m) \in \mathbb{R}^m$$

и непрерывно дифференцируемо во всех точках некоторой окрестности Ω точки $(\bar{a}, \bar{b})$;

2) $F(\bar{a}, \bar{b}) = 0$;

3) $|J_F(\bar{y})| \neq 0$, *то есть в точке $(\bar{a}, \bar{b})$ рассмотренный нами выше якобиан (см. обозначения перед теоремой) отличен от нуля.*

Тогда в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$, существует единственное непрерывно дифференцируемое отображение $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, причём:

1) $F(\bar{a},\ f(\bar{a})) = 0$ *(что означает, что* $f(\bar{a}) = \bar{b}$*);*

2) для всех точек $\bar{x}$ *из этой* δ*-окрестности справедливо равенство* $F(\bar{x},\ f(\bar{x})) = 0$*;*

3) для всех точек $\bar{x}$ *из этой* δ*-окрестности справедливо равенство*

$$J_f(\bar{x}) = -J_F^{-1}(\bar{y})((\bar{x},\ f(\bar{x}))) \cdot J_F(\bar{x})((\bar{x},\ f(\bar{x}))).$$

В пункте 3 матрица Якоби $J_F^{-1}(\bar{y})((\bar{x},\ f(\bar{x})))$ берется в точке $(\bar{x},\ f(\bar{x}))$, а частные производные берутся только по переменным $y_1,\ \ldots,\ y_m$. С матрицей $J_F(\bar{x})((\bar{x},\ f(\bar{x})))$ всё аналогично, только частные производные берутся по переменным $x_1,\ \ldots,\ x_p$.

Эту теорему оставляем без доказательства.

Рассмотрим простое следствие этой теоремы для трёхмерного пространства. Прежде всего поясним смысл теоремы, которую сформулируем ниже с помощью уже знакомых из первого семестра объектов.

Напомним, что в первом семестре мы изучали кривые, заданные параметрически, то есть был задан некоторый промежуток I, которому принадлежал параметр t, а мы рассматривали функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Множество упорядоченных пар (x, y) мы рассматривали как множество точек декартовой плоскости и называли это множество кривой (здесь важно, что функции φ и ψ чаще всего были непрерывно дифференцируемыми). В случае, если функция φ имела обратную, мы могли записать $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, то есть отображение $\psi \circ \varphi^{-1}$ задавало явную связь между переменными x и y. При уточнении условий на функции φ и ψ мы можем изучать вопросы, связанные с дифференцируемостью явной зависимости y от x.

Рассмотрим теперь аналогичную ситуацию в трёхмерном пространстве. Пусть задана область (то есть связное открытое множество) $D \subset \mathbb{R}^2$, которой принадлежат переменные u и v. Рассмотрим отображение F из D в $\mathbb{R}^3$, заданное уравнениями $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v)$ и $z = \omega(u, v)$. Его можно записать, как систему уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \omega(u, v). \end{cases}$$

Будем считать, что все заданные функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные в области D. При таких условиях эти уравнения задают поверхность в трёхмерном пространстве, и такое задание поверхности по аналогии с кривыми будем называть параметрическим. Если удастся выразить переменные u и v, например, через переменные x и y, а потом подставить в функцию ω, то получим явное задание поверхности $z = \omega(u(x, y), v(x, y))$. Для того, чтобы можно было выразить переменные u, v через переменные x, y, нужно чтобы отображение, задаваемое уравнениями $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v)$ имело обратное, а это будет выполнено, если якобиан $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$ не равен нулю в области D.

Сформулируем теорему (без доказательства).

Теорема 4. *Пусть задано отображение* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, причём его координатные функции* $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v)$ *и* $z = \omega(u, v)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные в области* $D \subset \mathbb{R}^2$*. Пусть якобиан* $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$ *не равен нулю в области* D*. Тогда в области* D *можно выразить переменные* u, v *через переменные* x, y *причём в области* Δ*, которой принадлежат переменные* x *и* y*, функция* $z = \omega(u(x, y), v(x, y))$ *непрерывна,* *имеет непрерывные частные производные и*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \\ \frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

Обозначим саму матрицу Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}$ через J. Мы отметили, что не будем доказывать теорему, но поясним, откуда берутся выражения для частных производных. Для этого найдем дифференциалы функций x, y, z:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \\ dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv, \\ dz = \frac{\partial\omega}{\partial u}du + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv. \end{cases}$$

Найдём обратную к матрице J :

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|}\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial v} & -\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можем записать:

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|}\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial v}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial v}dy \\ -\frac{\partial\psi}{\partial u}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial u}dy \end{pmatrix},$$

то есть $du = \frac{1}{|J|}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial v}dy\right)$, а $dv = \frac{1}{|J|}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial u}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial u}dy\right)$. Тогда

$$dz = \frac{1}{|J|}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial v}dy\right) + \frac{1}{|J|}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial u}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial u}dy\right) =$$
$$= \frac{1}{|J|}\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)dx + \frac{1}{|J|}\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dy$$

и, вспоминая выражения для определителей матриц второго порядка и то, что при dx и dy стоят частные производные функции z по переменным x и y соответственно, мы и приходим к формулам для производных из условия теоремы. Конечно, все матрицы Якоби рассматриваются в фиксированной точке, однако в качестве такой точки можно брать любые из области D и получающейся из неё области значений функций x и y, которую мы назвали Δ.