Лекция 2

Интегральный признак

Вернемся к вопросу сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $1 < p < 2$. Сейчас будет доказан признак сходимости, позволяющий дать ответ на этот вопрос. Этот признак также демонстрирует связь между несобственными интегралами и рядами.

Предложение 1. ***(Интегральный признак Коши – Маклорена).*** *Пусть функция f неотрицательна, не возрастает на промежутке $[1, +\infty)$ и при всех $c \in [1, +\infty)$ интегрируема на отрезке $[1, c]$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Доказательство. Отметим, что $f(k+1) \le \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \le f(k)$ при любом натуральном k в силу свойств интеграла и того, что функция f не возрастает. Суммируя эти неравенства при всех $k = 1, \ ..., \ n-1$, получим в силу аддитивности интеграла:

$$f(2) + ...f(n) \le \int\limits_{1}^{n} f(x)dx \le f(1) + ... + f(n-1).$$

Таким образом, из ограниченности последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ следует ограниченность функции $F(c) = \int\limits_{1}^{c} f(x)dx$, которая, в силу неотрицательности f, монотонна, а это по теореме Вейерштрасса означает существование предела $F(x)$ при $x \to +\infty$. С другой стороны, если интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то неограничена последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$. $\square$

Проиллюстрируем доказательство. Здесь прямоугольники соответствуют элементам

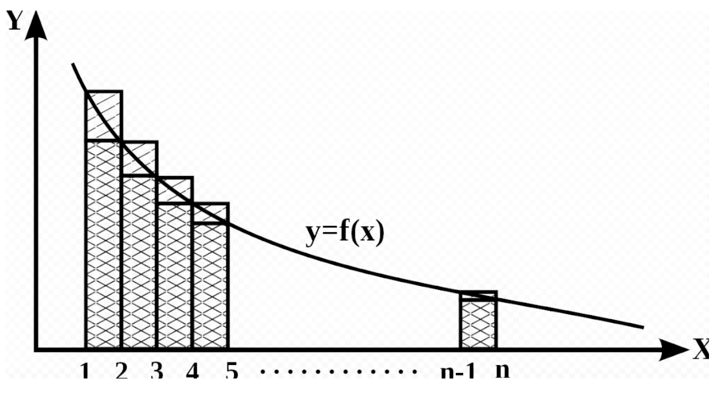

Рис. 1: Геометрический смысл доказательства

ряда, а площадь под кривой – это интеграл.

Пример 1. *1) Ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $p > 1$, так как при таких p*

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{\ln^{1-p} x}{1-p} \right|_2^b = \frac{\ln^{1-p} 2}{p-1},$$

а при $p < 1$ предел равен $+\infty$, то есть интеграл расходится, а тогда расходится и ряд.

При $p = 1$

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^b = +\infty,$$

то есть снова имеем расходимость как ряда, так и интеграла.

2) Напомним, как исследовать интеграл $I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$, $a > 0$. При $q = 1$

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty,$$

то есть в этом случае интеграл расходится.

При $q \neq 1$

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x^q} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-q}(b^{1-q} - a^{1-q}).$$

При $q > 1$ этот предел равен $\frac{1}{q-1}a^{1-q}$, а при $q < 1$ он равен $+\infty$.

Таким образом, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$, $a > 0$ сходится при $q > 1$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$ сходится при $q > 1$, так как только при этих q, как было установлено в примере 1, сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$.

Многие результаты теории рядов схожи с результатами для несобственных интегралов. Однако это так не для всех результатов. Например, нет аналога необходимого признака сходимости ряда для несобственного интеграла. Это видно из решения следующей задачи.

Упражнение. Пусть функция f непрерывна, $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, +\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$? (Ответ: нет).

Из второго пункта последнего примера вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является в определённом смысле граничным: он расходится, а любой ряд с фиксированным показателем $p > 1$ уже сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим.** Однако интересен вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$. Обратим внимание, что хотя показатель и больше 1, но он стремится к 1 при $n \to +\infty$. Для выяснения вопроса о сходимости применим признак сравнения в предельной форме.

Пример 2. *Мы знаем, что гармонический ряд расходится. При этом*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Таким образом, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ выполнены все условия признака сравнения в предельной форме, а так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Часто в вопросах, связанных со сходимостью рядов, вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рассматривается ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение 1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***условно сходящимся****.*

Пример 3. *Ряд* $1+(-1)+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})+...$ *сходится, так как последовательность частичных сумм принимает значения* $\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, ...\}$, *то есть предел этой последовательности равен 0. С другой стороны, ряд* $|1|+|(-1)|+|\frac{1}{2}|+|(-\frac{1}{2})|+|\frac{1}{3}|+|(-\frac{1}{3})|+... = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+...$ *расходится, что легко следует из примеров в предыдущей лекции. Таким образом, ряд* $1+(-1)+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})+...$ *сходится условно.*

Предложение 2. *Из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует справедливость критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \wedge p \in \mathbb{N} \ |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Из неравенства треугольника следует, что $|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|$, то есть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ выполнен критерий Коши, поэтому он сходится. □

Итак, абсолютно сходящийся ряд сходится, поэтому иногда, изучая вопрос о сходимости произвольного ряда, рассматривают ряд из модулей его элементов. Если выясняется, что ряд абсолютно сходится, то выясняется и вопрос о его сходимости.

Предложение 3. ***(Мажорантный признак Вейерштрасса).*** *Пусть при всех натуральных* n, *начиная с некоторого числа* $N \in \mathbb{N}$, *выполнены неравенства* $b_n \geq |a_n|$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Как мы уже знаем, если ряд сходится абсолютно, то он сходится. □

Пример 4. *1) Исследуем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ *на сходимость* ($x \in \mathbb{R}$). *Заметим, что* $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ *при всех натуральных* n. *Мы уже видели, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *сходится, поэтому ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|$ *сходится при всех действительных* x, *а тогда при всех* x *сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

2) Выясним, при каких x *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. *При* $|x| \leq 1$ *имеем* $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, *откуда следует абсолютная сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, *а значит и его сходимость. При* $|x| > 1$ *общий член ряда* $\frac{x^n}{n^2}$ *не стремится к 0, поэтому не выполнен необходимый признак. Таким образом, ряд сходится абсолютно при* $|x| \leq 1$, *а при* $|x| > 1$ *расходится.*

Сформулируем и докажем два часто применяемых признака сходимости.

Теорема 1. ***(Признак Даламбера).*** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. *Тогда:*

1) если $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится;*

2) если $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*

3) если $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как абсолютно сходиться, так и расходиться (в том смысле, что он не сходится даже условно).*

Доказательство. 1) Если $q < 1$, то существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $q < \alpha < 1$, и по определению предела существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \alpha$. Так как отбрасывание любого числа первых элементов ряда не влияет на сходимость, то будем считать, что уже при $n = 1$ выполнено неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \alpha$. Тогда получим

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right| < \alpha^n.$$

Таким образом, при любом $n \geq 1$ выполнено неравенство $|a_{n+1}| < |a_1|\alpha^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_1|\alpha^n$ сходится, так как это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, а тогда по признаку Вейерштрасса сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2) В этом случае существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, откуда $|a_{n+1}| > |a_n|$, поэтому общий член ряда не стремится к 0, то есть не выполнен необходимый признак и ряд расходится.

3) Приведём примеры рядов, удовлетворяющих условию 3, которые как сходятся, так и расходятся. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = 1$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. □

Отметим, что признак Даламбера полезен только для рядов, сходящихся со скоростью прогрессии, что и видно из доказательства. Тем не менее он очень удобен в применении.

Пример 5. *Исследуем на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. *Имеем:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x}{n+1} = 0$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, *поэтому исследуемый ряд сходится при любом действительном* x. *Отметим на будущее, что сумма этого ряда при фиксированном* x *равна* e^x *(позже это будет доказано).*

Теорема 2. ***(Радикальный признак Коши).*** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. *Тогда:*

1) если $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится;*

2) если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) если $q = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как абсолютно сходиться, так и расходиться.

Доказательство. 1) Если $q < 1$, то существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $q < \alpha < 1$, и по определению верхнего предела существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ $|a_n| < \alpha^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ сходится, так как это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, а тогда по признаку Вейерштрасса сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2) В этом случае существует подпоследовательность последовательности $\{|a_n|\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящаяся к числу $q > 1$, поэтому существует бесконечно много элементов $|a_{n_k}|$ последовательности $\{|a_n|\}_{n=1}^{+\infty}$, которые больше 1, откуда следует, что не выполнен необходимый признак, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3) Приведём примеры рядов, удовлетворяющих условию 3, которые как сходятся, так и расходятся.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1,$$

причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. □

Рассмотрим последовательность $|a_1|$, $\frac{|a_2|}{|a_1|}$, $\frac{|a_3|}{|a_2|}$, ..., $\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, ... и, используя одну из семинарских задач, заметим, что в случае существования предела $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_1| \cdot \frac{|a_2|}{|a_1|} \cdot \frac{|a_3|}{|a_2|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

из которого следует, что если применим признак Даламбера, то применим и признак Коши.

Сейчас мы приведём пример, когда признак Даламбера нельзя применить, а признак Коши применим.

Пример 6. *Пусть $\tau(n)$ – это число делителей числа $n \in \mathbb{N}$. При $x > 0$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$. В силу поведения функции $\tau(n)$ признак Даламбера применить не удастся, а по признаку Коши $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\tau(n)}x = x$, так как по лемме о зажатом пределе $x \le \sqrt[n]{\tau(n)}x \le \sqrt[n]{n}x$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$ сходится при $x < 1$ и расходится при $x > 1$. При $x = 1$ ряд расходится в силу необходимого признака.*

Оба доказанных признака дают ответ на вопрос о сходимости только в том случае, когда ряд сходится или расходится со скоростью прогрессии. Уже в случае рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ на признак Даламбера, ни признак Коши не применимы.

Ниже будет сформулирован гораздо более сильный признак Гаусса. В качестве факультативного материала мы докажем его, попутно сформулировав и доказав много полезных признаков сходимости.

Факультативный материал.

Теорема 3. ***(Признак Куммера.)*** *Пусть $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ – две последовательности положительных чисел. Тогда:*

1) *Если найдётся такое число $A > 0$ и такое натуральное N, что при всех $n \geq N$ выполнено неравенство*

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq A,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

2) *Если же найдётся такое натуральное N что при всех $n \geq N$*

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/c_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. **1)** Так как отбрасывание любого конечного числа элементов из начала не влияет на сходимость ряда, то считаем $N = 1$. Пусть нашлось нужное A. Тогда

$$c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1} \geq A a_n.$$

Выпишем эти неравенства при $n = 1,\ ...,\ n = k$ и просуммируем их. Тогда

$$c_1 a_1 - c_{k+1}a_{k+1} \geq A(a_1 + a_2 + ... + a_k),$$

откуда

$$s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k \leq \frac{c_1 a_1 - c_{k+1}a_{k+1}}{A} \leq \frac{c_1 a_1}{A},$$

то есть частичные суммы $\{s_k\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ограничены сверху, поэтому по критерию сходимости для рядов с неотрицательными членами этот ряд сходится.

2) В этом случае перепишем неравенство из условия в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{c_n}{c_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}.$$

Обозначим $d_n := 1/c_n$, тогда наше неравенство примет вид $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$, причём можно считать, что оно снова выполнено, начиная с $n = 1$. Выпишем все такие неравенства при $n = 1,\ ...,\ n = k - 1$ и перемножим их. Тогда

$$\frac{a_k}{a_1} \geq \frac{d_k}{d_1} \Leftrightarrow d_1 a_k \geq a_1 d_k.$$

Но по условия ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$ расходится, а умножение всех элементов ряда на одно и то же число не влияет на сходимость, поэтому согласно признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. □

Теорема 4. ***(Признак Раабе.)*** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– ряд с положительными членами и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится при* $R < 1$ *и расходится при* $R > 1$. *При* $R = 1$ *возможна как сходимость, так и расходимость.*

Доказательство. Пусть в признаке Куммера $c_n = (n-1)$. Тогда в силу этого признака ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, если

$$n - 1 - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha > 0,$$

что равносильно

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n},$$

что влечёт сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ по признаку Куммера. Опять же согласно признаку Куммера ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится, если $c_n = n - 1$ и

$$n\frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-1) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - 1/n.$$

Таким образом, признак Раабе получается как следствие признака Куммера. □

Теорема 5. ***(Признак Бертрана.)*** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– ряд с положительными членами.*

1) *Пусть существуют такое* $\beta > 0$ *и такое* $N \in \mathbb{N}$, *что при всех* $n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\beta}{n\ln n}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится.*

2) *Пусть выполнено неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. **1)** Пусть в признаке Куммера $c_n = (n - 1\ln(n-1))$. Тогда неравенство

$$(n-1)\ln(n-1) - n\ln n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \beta$$

означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится. Однако указанное неравенство равносильно такому:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{(n-1)\ln(1-1/n)}{n\ln n} - \frac{\beta}{n\ln n}.$$

Так как $\ln(1-1/n)^{n-1} > -1$, то

$$1-\frac{1}{n}-\frac{1+\beta}{n\ln n} \le 1-\frac{1}{n}+\frac{(n-1)\ln(1-1/n)}{n\ln n}-\frac{\beta}{n\ln n}$$

то есть неравенство из условия признака Бертрана влечёт неравенство из условия признака Куммера, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть теперь в признаке Куммера $c_n = (n-2)\ln(n-1) \ge 0$. Заметим, что при $n \ge 3$ справедливо неравенство $\ln(1-1/n) < -1/n$, откуда

$$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n} \ge \left(1-\frac{1}{n\ln n}\right) \ge \left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{\ln(1-1/n)}{\ln n}\right) = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\ln(n-1)}{\ln n},$$

откуда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n} \ge \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\ln(n-1)}{\ln n}$$

то есть неравенство из второго пункта условия влечёт выполнения признака Куммера расходимости ряда. □

Конец факультативного материала

Теорема 6. ***(Признак Гаусса.)*** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– ряд с положительными членами и фиксирована константа* $\delta > 0$. *Пусть также*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O(n^{-1-\delta}).$$

Тогда:

1) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha < 1$.

2) *Если* $\alpha = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится при* $\beta > 1$ *и расходится при* $\beta \le 1$.

Факультативный материал

Доказательство. **1)** Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/\alpha,$$

поэтому по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

2) Если $\alpha = 1$ и $\beta \ne 1$, то $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \beta$ при $n \to \infty$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится по признаку Раабе.

Если $\alpha = \beta = 1$, то получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}+O(n^{-1-\delta})} = 1-\left(\frac{1}{n}+O(n^{-1-\delta})\right)+\left(\frac{1}{n}+O(n^{-1-\delta})\right)^2\frac{1}{1+\frac{1}{n}+O(n^{-1-\delta})}$$

при $n \to \infty$, откуда имеем при некотором δ_1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\frac{1}{n}+O(n^{-1-\delta_1}),$$

что при достаточно больших n больше, чем $1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится по признаку Бертрана. **Конец факультативного материала** □

Пример 7. *Для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/n$ *имеем*

$$\frac{1/n}{1/(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} + 0,$$

то есть $\alpha = 1,\ \beta = 1,$ *что означает расходимость ряда.*

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ *получим*

$$\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2},$$

то есть $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \delta = 1,$ *а тогда ряд сходится.*