Лекция 3

Ряды с элементами произвольных знаков

Мы переходим к изучению рядов, в которых бесконечно много положительных элементов и бесконечно много отрицательных. Если удаётся выяснить, что ряд такого типа сходится абсолютно, что можно сделать с помощью изученных ранее признаков, то далее отсюда следует сходимость. Если же подобный ряд сходится условно, то для исследования на сходимость нужны другие признаки, к изучению которых мы и переходим.

Теорема 1. ***(Признак Лейбница.)*** *Пусть соседние члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *имеют разные знаки и* $|a_n|$ *монотонно стремится к нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Докажем, что для любых $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le |a_{n+1}|.$$

Пусть $b_n = |a_n|$. Так как соседние элементы ряда разных знаков и последовательность модулей этих элементов монотонно стремится к нулю, то то

$$|a_n + a_{n+1}| = |a_n| - |a_{n+1}| = b_n - b_{n+1}.$$

Рассмотрим отрезок ряда $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}$. При $p = 2k$ имеем:

$$\begin{aligned}|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+2k}| = |a_{n+1} + a_{n+2}| + |a_{n+3} + a_{n+4}| + ... + |a_{n+2k-1} + a_{n+2k}| = \\ = b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - b_{n+4} + ... + b_{n+2k-1} - b_{n+2k} = \\ = b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - ... - (b_{n+2k-2} - b_{n+2k-1}) - b_{n+2k} \le b_{n+1} = |a_{n+1}|.\end{aligned}$$

Такое раскрытие модулей верно, так как все числа $a_i + a_{i+1},\ a_{i+2} + a_{i+3}$ и т.д. одного знака при любом натуральном i.

При $p = 2k - 1$ имеем:

$$\begin{aligned}|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+2k-1}| = |a_{n+1}| - |a_{n+2} + a_{n+3}| - |a_{n+4} + a_{n+5}| - ...|a_{n+2k-2} + a_{n+2k-1}| = \\ = b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - (b_{n+4} - b_{n+5}) - ... - (b_{n+2k-2} - b_{n+2k-1}) \le b_{n+1} = |a_{n+1}|.\end{aligned}$$

Таким образом требуемое неравенство доказано. Теперь воспользуемся тем, что $|a_n| \to 0,\ n \to +\infty$ и по заданному $\varepsilon > 0$ найдём такое N, что при всех натуральных $n > N$ будет выполнено неравенство $|a_n| < \varepsilon$. Тогда из доказанного неравенства при всех таких n и при всех $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Таким образом ряд из условия сходится и терема доказана. □

Обратим внимание, что попутно доказано, что ***что остаток ряда Лейбница по модулю всегда меньше своего первого элемента.***

Пример 1. *1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится, так как его соседние элементы a_n и a_{n+1} противоположных знаков, а последовательность $|a_n|$ монотонно стремится к нулю. Сумма этого ряда равна $\ln 2$, что будет доказано, когда мы изучим степенные ряды.*

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ сходится в силу признака Лейбница. Действительно, имеем следующую цепочку равенств:

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi^2}{\pi\sqrt{n^2+1}+\pi n}\right),$$

откуда видно как чередование знаков элементов ряда, так и монотонное стремление к нулю модулей его элементов.

Хотя знакочередующиеся ряды, которые фигурируют в признаке Лейбница, имеют специальный вид, но на практике они встречаются достаточно часто.

Признаки Абеля и Дирихле

Теперь докажем два более общих признака, которые часто применяются для исследования рядов произвольного знака. Напомним, что в прошлом семестре мы формулировали аналогичные признаки сходимости для несобственных интегралов.

Сначала сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 1. *(**Преобразование Абеля**). Пусть $A_M = \sum\limits_{n=N+1}^{M} a_n$. Тогда при $M > N$ выполнены следующие равенства:*

$$\sum_{n=N+1}^{M} a_n b_n = A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{M} a_n b_n = A_M b_{M+1} + \sum_{n=N+1}^{M} A_n (b_n - b_{n+1}). \tag{2}$$

Доказательство. Если вычесть из правой части равенства (1) правую часть равенства (2), то получим

$$A_M b_M - A_M b_{M+1} - A_M b_M + A_M b_{M+1} = 0,$$

поэтому из справедливости равенства (1) вытекает справедливость равенства (2) и наоборот.

Докажем равенство (1). Имеем:

$$A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) = A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n b_n - \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n b_{n+1} =$$
$$= A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n b_n - \sum_{n=N+2}^{M} A_{n-1} b_n = A_{N+1} b_{N+1} + \sum_{n=N+2}^{M} (A_n - A_{n-1}) b_n =$$
$$\sum_{n=N+1}^{M} a_n b_n,$$

чем всё и доказано. □

Эта формула является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям. Здесь интегрирование по частям заменено на “суммирование по частям”, то есть через суммирование наборов по отдельности можно представить сумму произведений наборов.

Теперь докажем признаки Абеля и Дирихле. Обратите внимание, как помогает при доказательстве преобразование Абеля.

Теорема 2. ***(Признаки Абеля и Дирихле.)*** *Рассмотрим ряд, каждый элемент которого является произведением двух чисел:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n. \tag{3}$$

Признак Абеля. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится, а последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна и ограничена. Тогда ряд (3) сходится.*

Признак Дирихле. *Пусть последовательность* $\{b_n\}$ *монотонно стремится к нулю, а последовательность* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *ограничена, то есть существует такое* $C > 0$, *что* $|s_n| \leq C$ *при всех натуральных* n. *Тогда ряд (3) сходится.*

Доказательство. Можно считать, что последовательность $\{b_n\}$ неотрицательна и монотонно стремится к нулю. Действительно, если она неположительна и монотонно стремится к нулю, то можно свести доказательство к случаю неотрицательной последовательности, рассмотрев ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-a_n)(-b_n)$, а если её предел равен B и $B \neq 0$ (что возможно в признаке Абеля), то справедливо равенство $b_n = B + c_n$, где c_n монотонно стремится к нулю, а тогда всё снова сводится к исследованию сходимости с неотрицательной и стремящейся к нулю последовательностью.

Обозначим $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$ через A_{n+p} и воспользуемся преобразованием Абеля для отрезка ряда (3):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|A_{n+p} b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1})\right| \leq$$

$$\leq \max_{n+1 \leq k \leq n+p} |A_k| \sum_{k=n+1}^{n+p} (b_k - b_{k+1}) \leq \max_{n+1 \leq k \leq n+p} |A_k| b_n.$$

Здесь мы провели оценки, воспользовавшись тем, что $\{b_n\}$ состоит из неотрицательных элементов и монотонно стремится к нулю.

Для доказательства **признака Абеля** заметим, что $|A_k|$ представляет собой модуль некоторого отрезка $\sum\limits_{l=n+1}^{k} a_l$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, который может быть сделан меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ в силу критерия Коши сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Так как последовательность $\{b_n\}$ монотонна, то она ограничена некоторой константой $M > 0$, откуда окончательно получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < M\varepsilon,$$

то есть для ряда (3) выполнен критерий Коши, поэтому он сходится. Таким образом, признак Абеля доказан.

Для доказательства **признака Дирихле** заметим, что

$$|A_k| = \left|\sum_{l=n+1}^{k} a_l\right| = |s_k - s_n| \le |s_k| + |s_n| \le 2C,$$

а также, в силу стремления к нулю $\{b_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $b_n < \varepsilon$, поэтому окончательно

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < C\varepsilon.$$

Таким образом, для ряда (3) снова выполнен критерий Коши и признак Дирихле также доказан. □

Отметим, что признак Лейбница теперь является следствием признака Дирихле (проверьте это, то есть выведите из признака Дирихле признак Лейбница).

Пример 2. *1) Выясним, при каких α сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$.*

Если $\alpha \le 0$, то не выполнен необходимый признак сходимость (проверьте это в качестве ***упражнения****), поэтому ряд расходится.*

Если же $\alpha > 0$, то последовательность $b_n = 1/n^\alpha$ монотонно стремится к нулю, а для последовательности

$$s_n = \sin 1 + \sin 2 + ... + \sin n$$

имеем:

$$\begin{aligned}\sin(1/2) \cdot s_n = \sin(1/2) \cdot \sin 1 + \sin(1/2) \cdot \sin 2 + ... + \sin(1/2) \cdot \sin n = \\ = \frac{1}{2}(\cos(1/2) - \cos(3/2) + \cos(3/2) - \cos(5/2) + \cos(5/2) - \\ - \cos(7/2) + ... + \cos(n - 1/2) - \cos(n + 1/2)) = \\ = \frac{1}{2}(\cos(1/2) - \cos(n + 1/2)),\end{aligned}$$

откуда

$$|s_n| = \left|\frac{\cos(1/2) - \cos(n + 1/2)}{2\sin(1/2)}\right| \le \frac{1}{\sin(1/2)}.$$

Таким образом, существует $C = \frac{1}{\sin(1/2)}$, что $|s_n| \le C$ при всех натуральных n, поэтому для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ при $\alpha > 0$ выполнен признак Дирихле, а тогда этот ряд сходится при таких α.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n^3+1}{n^3+2}$ сходится в силу признака Абеля. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится, так как это ряд из пункта 1, где $\alpha = \frac{1}{2}$, а в силу равенства

$$\frac{n^3+1}{n^3+2} = 1 - \frac{1}{n^3+1}$$

и монотонного возрастания последовательности n^3 получаем, что последовательность $b_n = \frac{n^3+1}{n^3+2}$ монотонна и ограничена, поэтому признак Абеля выполнен.

3) Докажем расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$. *Для его общего члена имеем в силу локальной формулы Тейлора*

$$\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n} = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\sin n}{\sqrt{n}}+\frac{\sin^2 n}{n}+o\left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2 n}{n} + \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}} + o\left(\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2 n}{n} + \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}} + o\left(\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}\right)\right),$$

причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ *сходится в силу пункта 1, ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}$ *сходится, так как* $\left|\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, *поэтому применим признак Вейерштрасса, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} o\left(\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}\right)$ *сходится, так как по определению*

$$o\left(\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}\right) = \gamma_n \cdot \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}},$$

где γ_n *– бесконечно малая последовательность, поэтому при всех достаточно больших* n *справедливо неравенство*

$$\left|o\left(\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}\right)\right| \leq \left|\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

и снова применим признак Вейерштрасса.

Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ *расходится, так как*

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n},$$

причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ *сходится в силу признака Дирихле, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ *расходится, откуда следует, что расходится и исходный ряд.*

При этом при исследовании исходного ряда на сходимость может возникнуть идея применить признак Дирихле, если положить $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sin n}$, *а* $a_n = \sin n$. *Как следует из расходимости, этот признак не даст ответ на вопрос о сходимости. Причина этого в том, что последовательность* b_n ***стремится к нулю, не являясь монотонной.*** *Таким образом, рассмотренный пример демонстрирует важность условия монотонности последовательности* b_n *в признаке Дирихле. Более того, общий член этого ряда никак нельзя представить в виде произведения двух последовательностей, удовлетворяющих признаку Дирихле или признаку Абеля, так как этот ряд расходится.*