Лекция 4

Перестановка элементов ряда

Перестановку элементов ряда мы определим следующим образом. Рассмотрим биекцию натурального ряда в себя $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, то есть взаимно-однозначное отображение, при котором каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное натуральное число $\sigma(n)$, причём нет такого натурального числа, которому бы ничего не было поставлено в соответствие, и у каждого натурального есть свой прообраз при отображении σ. Такая биекция σ и будет назваться перестановкой. Итак, справедливо следующее определение.

Определение 1. *Перестановкой на множестве натуральных чисел называется биективное отображение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Например, если всякому нечётному числу мы поставим в соответствие следующее за ним чётное, а всякому чётному – предыдущее нечётное, то есть

$$\sigma(n) = \begin{cases} 2k, \text{ если } n = 2k-1, \\ 2k-1, \text{ если } n = 2k, \end{cases}$$

то мы получим перестановку на множестве натуральных чисел. Если же мы рассмотрим отображение, при котором $\sigma(n) = n + 1$, то есть каждому числу поставим в соответствие следующее за ним, то мы не получим перестановку, так как нет такого $n \in \mathbb{N}$, что $\sigma(n) = 1$.

Тогда если изначально была задана последовательность $\{a_n\}$, то после перестановки мы можем рассмотреть последовательность $\{a_{\sigma(n)}\}$. Например, если изначально была последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{2k-1},\ a_{2k},\ \ldots,$$

то после перестановки, которую рассмотрели выше, получим

$$a_2,\ a_1,\ a_4,\ a_3,\ \ldots,\ a_{2k},\ a_{2k-1},\ \ldots .$$

Таким образом мы можем переставлять элементы ряда и рассматривать новые ряды, полученные при таких перестановках из исходных.

Мы знаем, что в конечной сумме от перестановки мест слагаемых сумма не изменяется. Сейчас мы выясним, как меняется ситуация для бесконечных сумм.

Теорема 1. ***(Теорема Дирихле).*** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно. Тогда для любой перестановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится абсолютно, причём его сумма и сумма ряда из его модулей остаются теми же.*

Доказательство. Пусть $a_{\sigma(n)} = b_n$ и $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, а также $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_1, что при всех $n > N_1$ выполнено неравенство $|A_n - A| < \varepsilon$. Для того же $\varepsilon > 0$ согласно критерию Коши существует такое N_2, что при всех $n > N_2$ и всех $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$ и пусть число M настолько велико, что все числа $1,\ 2,\ \ldots,\ N$ содержатся среди чисел $\sigma(1),\ \ldots,\ \sigma(M)$. Тогда при всех $n > M$ и $m = \max\{\sigma(1),\ \ldots,\ \sigma(M)\}$

$$|A - B_n| = |A - \sum_{k=1}^{n} b_k| \le |A - \sum_{k=1}^{N} a_k| + \sum_{k=N+1}^{m} |a_k| < 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = A$, то есть суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ совпадают.

Теперь точно те же рассуждения можно провести, если считать, что изначально дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ и рассматривается $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$. Таким образом, получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ сходится к той же сумме, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится абсолютно. $\square$

Итак, свойство “от перестановки мест слагаемых сумма не изменяется” сохраняется и для бесконечных абсолютно сходящихся рядов, но отказаться от требования абсолютной сходимости нельзя.

Теперь разберёмся с перестановками элементов условно сходящихся рядов.

Теорема 2. ***(Теорема Римана).*** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда для любого* $A \in \mathbb{R}$ *существует такая перестановка* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ *сходится к сумме* A. *Аналогичное утверждение верно, если вместо* A *рассматривать* $+\infty$, $-\infty$ *и* ∞.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, состоящую из всех её неотрицательных элементов. Занумеруем эти элементы подряд в том порядке, в котором они встречаются в последовательности: $a_1^+,\ a_2^+,\ \ldots,\ a_n^+,\ \ldots$. Аналогично рассмотрим подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, состоящую из всех её отрицательных элементов. Занумеруем модули этих элементов подряд в том порядке, в котором элементы встречаются в последовательности: $a_1^-,\ a_2^-,\ \ldots,\ a_n^-,\ \ldots$.

Прежде всего докажем, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится условно, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ расходятся. Действительно, если бы оба этих ряда сходились, то они бы сходились абсолютно (так как в каждом ряду все элементы одного знака, а в ряде $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+$, ещё могут встречаться нулевые элементы) а тогда сходился бы абсолютно и исходный ряд. Если же один из рядов сходился бы, а второй расходился, то последовательность частичных сумм исходного ряда тоже расходилась бы, поэтому и сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходился бы. Итак, мы доказали, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ расходится к $+\infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ расходится к $-\infty$.

Покажем, как получить заданную сумму ряда A, переставив его члены. Пусть для определённости $A \ge 0$. Возьмём $k_1 \in \mathbb{N}$ таким, что

$$a_1^+ + \ldots a_{k_1-1}^+ < A, \text{ а } a_1^+ + \ldots + a_{k_1}^+ > A.$$

Теперь возьмем $k_2 \in \mathbb{N}$ таким, что

$$(a_1^+ + \ldots + a_{k_1}^+) - (a_1^- + \ldots + a_{k_2-1}^-) > A, \text{ а } (a_1^+ + \ldots + a_{k_1}^+) - (a_1^- + \ldots + a_{k_2}^-) < A.$$

Далее выберем k_3 идущих подряд неотрицательных элементов ряда, начиная с $a^+_{k_1+1}$, чтобы всех слагаемых до $a^+_{k_3-1}$ была меньше A, а после добавления $a^+_{k_3}$ становилась больше и так далее.

В результате такой процедуры будут использованы все элементы ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

В итоге получим ряд

$$(a^+_1 + ... + a^+_{k_1}) - (a^-_1 + ... + a^-_{k_2}) + (a^+_{k_1+1} + ... + a^+_{k_3}) - (a^-_{k_2+1} + ... + a^-_{k_4}) + ...,$$

и нам необходимо проверить, что он сходится к A. Для этого отметим, что в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ $|a_n| \to 0,\ n \to \infty$, поэтому при достаточно больших k_j, с одной стороны, элементы a^+_l или a^-_l меньше по модулю любого заданного $\varepsilon > 0$ при всех $l > k_j$, а с другой стороны, для того же $\varepsilon > 0$ частичная сумма построенного ряда, в которой содержатся слагаемые с номерами, большими k_j, отличается от A меньше, чем на ε.

Таким образом, мы построили ряд, состоящий из элементов ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, но идущих в другом порядке, сумма которого равна числу A. Аналогично, но начиная с отрицательных слагаемых, мы можем получить любую сумму A при $A < 0$.

Для получения $+\infty$ можем взять столько элементов a^+_n, что разность суммы этих элементов и a^-_1 будет не меньше любого наперёд заданного числа, а затем можем увеличивать эту сумму так, чтобы вычитая очередное a^-_n мы получали всё большую сумму. Тогда в итоге будут использованы все элементы исходного ряда, а сумма разойдётся к $+\infty$.

Остальные случаи разбираются аналогично. $\square$