Лекция 5

Равномерная сходимость

Мы переходим к изучению функциональных последовательностей и рядов. Теперь элементами изучаемой последовательности или ряда будут не числа, а функции, определенные на некотором общем для всех функций множестве.

Итак, пусть дано множество $E \subseteq \mathbb{R}$, на котором определены функции $f_n (n \in \mathbb{N})$. При каждом фиксированном $x \in E$ рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x)\}$. Если при фиксированном x эта последовательность сходится, то говорят, что *функциональная последовательность* $\{f_n\}$ *сходится в точке* x. *Множество* X *тех* $x \in E$, *при которых числовая последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится, называется* ***множеством сходимости*** *или* ***областью сходимости*** *функциональной последовательности* $\{f_n\}$.

Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственное число, являющееся пределом соответствующей числовой последовательности, то есть на множестве X определена функция $f : X \to \mathbb{R}$, которая задаётся равенством $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in X$.

Для нас важным будет вопрос о том, какие свойства, присущие элементам функциональной последовательности, сохраняются для предельной функции, например, сохраняется ли непрерывность предельной функции в точке, если все элементы функциональной последовательности непрерывны в этой точке и она принадлежит области сходимости, можно ли дифференцировать или интегрировать предельную функцию на некотором подмножестве множества сходимости, если этим свойством на подмножестве обладают элементы функциональной последовательности.

Оказывается, что многие свойства предельной функции f зависят от характера сходимости последовательности функций $\{f_n\}$ к предельной. Поясним это на примерах.

Пример 1. *1) Рассмотрим последовательность* $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. *При всех таких* x, *что* $|x| < 1$, *и при* $x = 1$ *эта последовательность сходится, а при остальных* x *предела нет, поэтому область сходимости* X *– это множество* $(-1, 1]$. *При этом*

$$\forall x : |x| < 1 \ \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

а при $x = 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$. *Таким образом, предельная функция* f *задаётся следующим образом:* $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

2) Теперь рассмотрим последовательность функций $\{\frac{x^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. *Здесь область сходимости* $X = [-1, 1]$, *так как* $\forall x : \ |x| \le 1 \ |\frac{x^n}{n}| \le \frac{1}{n} \to 0,\ n \to +\infty$, *а при* $|x| > 1$ *последовательность расходится, так как числитель растёт экспоненциально, а знаменатель растёт, как степенная функция (см. пример* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n}$ $(a > 1)$ *из семинарского листка). Таким образом, предельная функция* f *здесь – это константа* 0 *на отрезке* $[-1, 1]$.

Обратим внимание, что предельная функция f получилась разрывной в точке 1 в первом пункте, а в пункте 2 f оказалась непрерывной на всей области сходимости. Для того, чтобы лучше понять причину этого, более внимательно рассмотрим характер сходимости последовательности из пункта 1. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и попробуем по этому ε подобрать такое $N \in \mathbb{N}$, чтобы при всех $n > N$ было выполнено неравенство $|f(x) - x^n| < \varepsilon$. Это N зависит не только от ε, но и от точки x. Например, в точке 0 любое N подойдет, так как при $x = 0$ у нас будет последовательность нулей, а чем ближе точка x к 1, тем больше натуральных n, для которых значения $f_n(x)$ превысят ε (при любом достаточно малом фиксированном $\varepsilon > 0$), так что выбор N зависит от того, в какой точке рассматривается последовательность. Для наглядного представления о характере сходимости см. рисунок.

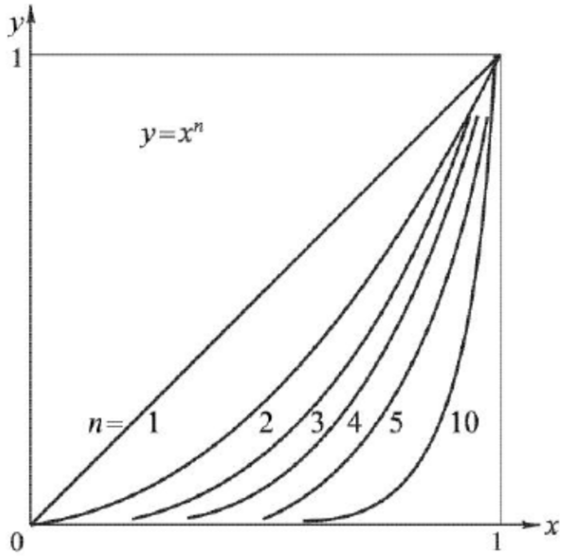

Рис. 1: Чем ближе к 1, тем больше значения элементов последовательности

При этом в пункте 2 выбор N зависит только от $\varepsilon > 0$ так как сразу для всех $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство $|\frac{x^n}{n}| \leq \frac{1}{n}$ и как только $N = [1/\varepsilon]$, то при всех $n > N$ выполнено неравенство $|\frac{x^n}{n}| < \varepsilon$.

Как видим, от характера сходимости зависит непрерывность предельной функции f. Ниже мы сформулируем и докажем теорему, в которой будут даны достаточные условия непрерывности предельной функции. Для этого нам потребуется следующее определение.

Определение 1. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ***сходится равномерно*** *к функции* $f(x)$ *на множестве* X*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n > N \; \forall x \in X \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Определение 2. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***сходится равномерно*** *к функции* $S(x)$ *на множестве* X*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n > N \; \forall x \in X \; |\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, *где* $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Другими словами, ряд равномерно сходится, если равномерно сходится его последовательность частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Разность $S(x) - S_n(x)$ ещё можно записать в виде $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, а r_n называют *остатком ряда.* Таким образом, равномерная сходимость равносильна тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n > N \; \forall x \in X \; |r_n(x)| < \varepsilon,$$

то есть в случае равномерной сходимости ряда остаток этого ряда должен равномерно сходиться к нулю.

Выше мы ввели понятие сходимости функциональной последовательности в точке. В отличие от равномерной сходимости, такую сходимость называют ***поточечной сходимостью.***

Отсутствие равномерной сходимости может означать как зависимость от точки, при которой всё же функциональная последовательность сходится на множестве X, так и тот факт, что при каком-то x сходимости нет. Запишем определение того, что функциональная последовательность не сходится равномерно на множестве X.

Определение 3. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ***не сходится равномерно*** *к функции* $f(x)$ *на множестве* X*, если*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ \exists x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Итак, равномерная сходимость означает, что *сразу во всех точках множества* X элементы функциональной последовательности с достаточно большими номерами сколь угодно мало отличаются от предельной функции.

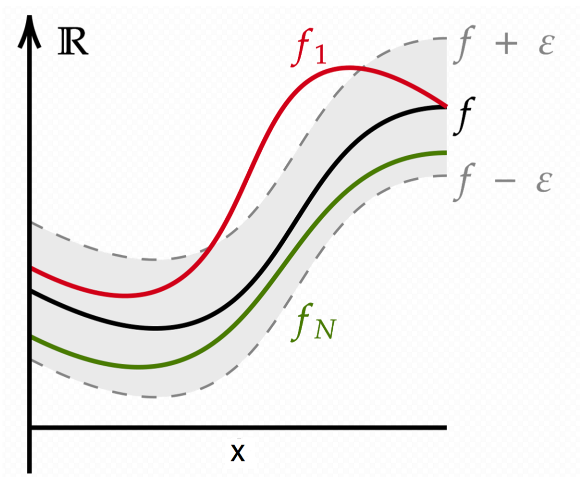

Рис. 2: С ростом номеров элементы последовательности полностью в полосе вокруг предельной функции

Критерии и признаки равномерной сходимости

Теорема 1. ***(Супремум-критерий).*** *Последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится к функции* f *на множестве* X *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Доказательство. Необходимость просто следует из определения равномерной сходимости, так как выражение $|f_n(x) - f(x)|$ сколь угодно мало при всех достаточно больших n по определению, а тогда и супремум стремится к нулю.

Достаточность выполнена, так как то, что предел из условия равен нулю, означает по определению, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Так как $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, то это равносильно выполнению неравенства $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ сразу при всех $x \in X$. $\square$

Этот простой критерий очень удобен в применении.

В качестве функциональной последовательности можно взять последовательность частичных сумм функционального ряда, то есть критерий справедлив и для рядов.

Пример 2. *Исследуем на равномерную сходимость последовательность* $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ *на множестве* $X = [0,1]$. *Прежде всего отметим, что* $f_n(0) = f_n(1) = 0$, *а при всех* $x \in (0,1)$ *выполнено равенство* $f_n(x) = x^n(1-x)$, *откуда, так как предел* x^n *при всех* $x \in (0,1)$ *равен нулю, получаем, что для каждого* $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Выясним, справедливо ли, что $f_n \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$. *Для этого заметим, что при* $x \in [0,1]$

$$|x^n - x^{n+1} - 0| = x^n - x^{n+1} = f_n(x)$$

и $f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$ *или* $x = \frac{n}{n+1}$, *причём в точке* $x = \frac{n}{n+1}$ *функция* f_n *принимает наибольшее значение на отрезке* $[0,1]$, *то есть это точка максимума, так как* $f_n'(x) \geq 0$ *при* $0 \leq x \leq \frac{n}{n+1}$ *и* $f_n'(x) \leq 0$ *при* $1 \geq x > \frac{n}{n+1}$. *Таким образом,*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1},$$

причём

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(-n-1+1)\cdot(-1)} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0,$$

а значит последовательность $\{f_n\}$ *сходится равномерно в силу супремум-критерия.*

Теорема 2. ***(Критерий Коши).*** *Последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится к функции* f *на множестве* X *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n, m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

.

Доказательство. Необходимость. Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X к функции f, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

При $m > N$ получим

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Если условие теоремы выполнено, то при каждом фиксированном $x \in X$ последовательность $f\{f_n(x)\}$ фундаментальна. Обозначим предел этой числовой последовательности через $f(x)$. Так как эти рассуждения верны для любой точки $x \in X$, то тем самым функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f на множестве X. По условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2,$$

а тогда, переходя к пределу в неравенстве при $m \to \infty$, получим

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

то есть по определению $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. □

Теперь сформулируем критерий Коши равномерной сходимости ряда.

Теорема 3. ***(Критерий Коши для ряда).*** *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится к функции* S *на множестве* X *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Для доказательства нужно просто применить критерий Коши для функциональных последовательностей к последовательности частичных сумм ряда.

Из критерия Коши для ряда легко вывести необходимый признак равномерной сходимости.

Предложение 1. ***(Необходимый признак равномерной сходимости ряда).*** *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится к функции* S *на множестве* X. *Тогда* $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$, *то есть общий член этого ряда равномерно стремится к нулю.*

Доказательство. В критерии Коши для ряда положим $p = 2$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} f_k(x) \right| < \varepsilon,$$

то есть $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in X$. Это означает по определению, что $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$. □

Теперь сформулируем несколько часто применяемых на практике признаков сходимости.

Предложение 2. ***(Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости).*** *Пусть при всех натуральных* n, *начиная с некоторого числа* $N \in \mathbb{N}$ *и для всех* $x \in X$ *выполнены неравенства* $|f_n(x)| \leq b_n$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X.

Доказательство. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится для каждого $x \in X$. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ выполнен критерий Коши, поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при всех $n > N$, всех натуральных p и всех $x \in X$ выполнены неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon,$$

то есть для функционального ряда выполнен критерий Коши равномерной сходимости. □

Названия признака связано с тем, что для функции f_n мы ищем *мажоранту* на множестве X, то есть величину, которая больше, чем $|f_n(x)|$ при всех $x \in X$. Так как эта мажоранта не зависит от x, то как раз и удаётся провести рассуждения сразу для всех значений переменной из множества X, то есть возникает равномерность.

Пример 3. *1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, поскольку $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ при всех натуральных n, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.*

2) Выясним, при каких x сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. При $|x| \le 1$ имеем $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

При $|x| > 1$ общий член ряда $\frac{x^n}{n^2}$ не стремится к 0, поэтому не выполнен необходимый признак. Таким образом, ряд сходится равномерно при $|x| \le 1$, а при $|x| > 1$ расходится.

После изучения признака Вейерштрасса может возникнуть впечатление, что абсолютная и равномерная сходимость ряда связаны. Однако это не так.

Пример 4. *1) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ абсолютно сходится на интервале $(-1, 1)$, поскольку является бесконечно убывающей геометрической прогрессией при каждом $x \in (-1, 1)$. При этом этот ряд не сходится равномерно на данном интервале. Действительно, если бы он сходился равномерно, то его общий член равномерно бы стремился к нулю, в силу необходимого признака, что в силу супремум-критерия означало бы, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-1,1)} |x^n - 0| = 0.$$

Однако $\sup\limits_{x\in(-1,1)} |x^n| = 1$, поэтому супремум не может стремиться к нулю. Это противоречие и доказывает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ на интервале $(-1, 1)$ сходится абсолютно, но неравномерно.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ равномерно сходится на множестве $X = [0, +\infty)$, Действительно, для каждого $x \in X$ это ряд Лейбница, поэтому он сходится на X. Обозначим его сумму через $S(x)$. Тогда по свойству ряда Лейбница

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}\right| < \frac{1}{x+n} < 1/n.$$

Так как $\frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty$, то по супремум-критерию исходный ряд сходится равномерно. При этом $\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ расходится в силу признака сравнения в предельной форме, потому что $\frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n},\ n \to \infty$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ равномерно сходится на множестве $X = [0, +\infty)$, но абсолютной сходимости нет.

Полезно обратить внимание, как можно применять свойства признака Лейбница при доказательстве равномерной сходимости, как это было сделано в пункте 2. ***Свойство состоит в том, что остаток ряда Лейбница по модулю всегда меньше своего первого элемента*** (а тогда и любого предыдущего).

Наконец, для проверки равномерной сходимости также можно сформулировать признаки Абеля и Дирихле.

Теорема 4. ***(Признаки Абеля и Дирихле.)*** *Рассмотрим ряд, каждый элемент которого является произведением двух функций:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x). \tag{1}$$

Признак Абеля. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X, *а последовательность* $\{b_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in X$ *и существует такая константа* $C > 0$, *что* $|b_n(x)| \leq C$ *сразу для всех* $x \in X$ *и* $n \in N$ *(такое свойство называется равномерной ограниченностью). Тогда ряд (1) сходится.*

Признак Дирихле. *Пусть последовательность* $\{b_n(x)\}$ *равномерно сходится к нулю на множестве* X *и монотонна при каждом фиксированном* $x \in X$, *а последовательность* $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *равномерно ограничена, то есть существует такое* $C > 0$, *что* $|S_n(x)| \leq C$ *при всех* $x \in X$ *и всех натуральных* n. *Тогда ряд (1) сходится.*

Эту теорему мы не доказываем, но отметим, что идейно всё точно также, как и в доказательствах этих признаков для числовых рядов, то есть снова используем преобразование Абеля, а затем применяем критерий Коши, но на этот раз уже критерий Коши для равномерной сходимости.

Пример 5. *1) Исследуем на равномерную сходимость на интервале* $(\delta, 2\pi - \delta)$ $(\delta > 0)$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. *Обозначим*

$$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx,$$

тогда

$$\begin{aligned}\sin(x/2) \cdot S_n(x) &= \sin(x/2) \cdot \sin x + \sin(x/2) \cdot \sin 2x + ... + \sin(x/2) \cdot \sin nx = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x/2) - \cos(3x/2) + \cos(3x/2) - \cos(5x/2) + \cos(5x/2) - \\ &\quad - \cos(7x/2) + ... + \cos(nx - x/2) - \cos(nx + x/2)) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x/2) - \cos(nx + x/2)),\end{aligned}$$

откуда

$$|S_n(x)| = \left| \frac{\cos(x/2) - \cos(nx + x/2)}{2\sin(x/2)} \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)},$$

то есть на всем рассматриваемом интервале любая частичная сумма ограничена не зависящей от x *константой, а, значит, равномерно ограничена. Последовательность* $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *состоит из констант, потому она очевидно равномерно сходится к нулю и монотонна. Таким образом, ряд сходится равномерно на указанном интервале по признаку Дирихле.*

2) Исследуем тот же ряд, но уже на интервале $(0, 2\pi)$. *Оценки из пункта 1 уже провести не удастся, так как теперь рассматриваемый интервал уже не отделен от нулей функции* $f(x) = \sin(x/2)$. *Однако заметим, что* $n-$*ый член нашего ряда в точке* $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ *равен* $\frac{\sin(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}}$, *поэтому с увеличением* n *значение* $n-$*ого элемента в точке* x_n *увеличивается, стремясь к 1. Если бы равномерная сходимость имела место, то в силу необходимого признака равномерной сходимости общий член* $\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ *нашего ряда равномерно стремился бы к нулю на интервале* $(0, 2\pi)$, *то есть для заданного* $\varepsilon > 0$ *при всех* $x \in (0, 2\pi)$ *и достаточно больших* n *выполнялось бы неравенство* $\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Таким образом, не выполняется необходимый признак, поэтому равномерной сходимости на $(0, 2\pi)$ *нет. При этом с помощью обычного признака Дирихле можно доказать, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ *сходится в каждой точке интервала* $(0, 2\pi)$, *то есть имеет место поточечная сходимость.*