Лекция 6

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теперь мы будем обсуждать сохранение пределом функциональной последовательности и суммой ряда таких свойств, как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Сразу отметим, что равномерная сходимость играет в таких вопросах важную роль, однако сумма и предел могут сохранять названные свойства не только при равномерной сходимости к ним ряда и последовательности соответственно.

Начнём с непрерывности.

Непрерывность при равномерной сходимости

Начнём с теоремы о перестановке пределов в равномерно сходящейся последовательности, с помощью которой просто доказывается непрерывность равномерного предела непрерывных функций.

Предложение 1. *Пусть последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X к функции f, а точка a является предельной для множества X. Пусть для всякого $n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{X \ni x \to a} f_n(x) = A_n$. Тогда последовательность $\{A_n\}$ имеет предел и справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{X \ni x \to a} f(x)$. Другими словами*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{X\ni x\to a} f_n(x) = \lim_{X\ni x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Доказательство. Так как сходимость последовательности $\{f_n\}$ равномерная, то по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В неравенстве $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ перейдём к пределу при $x \to a$. В силу предельного перехода в неравенствах получим $|A_n - A_m| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Отсюда следует, что последовательность $\{A_n\}$ фундаментальна, поэтому у неё есть предел, который обозначим A.

Выберем N настолько большим, чтобы при заданном $\varepsilon > 0$ при всех $n > N$ выполнялось неравенство $|A - A_n| < \varepsilon/3$, а также (в силу равномерной сходимости) для того же $\varepsilon > 0$ и всех $x \in X$ при всех $n > N$ было справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$

Наконец, так как $A_n = \lim\limits_{X\ni x\to a} f(x)$, то при том же $\varepsilon > 0$ найдём такое $\delta > 0$, что при всех $x \in X$, таких, что $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|f_n(x) - A_n| < \varepsilon/3$.

В итоге при таком $\varepsilon > 0$ и всех $x \in X$, таких, что $0 < |x - a| < \delta$, получим

$$|f(x) - A| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Теперь мы можем доказать теорему о непрерывности.

Теорема 1. ***(Непрерывность).*** *Пусть все функции последовательности $\{f_n\}$ непрерывны на множестве X и равномерно сходятся к функции f на этом множестве. Тогда функция f непрерывна на множестве X.*

Доказательство. Если точка множества X изолирована, то непрерывность следует просто из определения непрерывности, так как предельная точка определена в этой изолированной точке, а тогда и непрерывна в ней.

Если точка предельная, то предел в ней каждой из функций последовательности равен просто значению каждой функции в этой точке. Тогда, применяя предыдущее предложение, получаем непрерывность функции f в этой точке. □

Пример 1. *1) Последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, которую мы рассмотрели раньше, состоит из непрерывных функций, но предельная функция f задаётся следующим образом: $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.*

Она разрывна, так как сходимость при всех таких x, что $|x| < 1$, и при $x = 1$ неравномерная.

2) Последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ стремится к нулю, так как в знаменателе степень n больше, чем в числителе. С другой стороны, при $\varepsilon = 1/2$ нельзя указать такое N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|f_n(x)| < 1/2$ сразу при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $f_n(n) = 1/2$ для всех натуральных n. Итак, сходимость неравномерная, хотя предел последовательности функций – это тождественно нулевая на всей прямой функция, которая, конечно, непрерывна. Таким образом, теорема выше даёт достаточные условия того, что функция является непрерывной.

Сформулируем теперь теоремы для рядов.

Предложение 2. *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к сумме $S(x)$, а точка a является предельной для множества X. Пусть для всякого*

$$n \in \mathbb{N} \lim_{X \ni x \to a} f_n(x) = A_n.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{X \ni x \to a} S(x)$. Другими словами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{X \ni x \to a} f_n(x) = \lim_{X \ni x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Доказательство. Последовательность частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ удовлетворяет всем условиям аналогичной теоремы для последовательностей, причём в силу арифметики пределов $\lim\limits_{X \ni x \to a} S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$. Далее применительно к последовательности $\{S_n(x)\}$ в точности повторяются все рассуждения из доказательства соответствующей теоремы для последовательностей. □

Предложение 3. ***(Непрерывность ряда).*** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к сумме $S(x)$, а его элементы непрерывны на множестве X. Тогда функция S непрерывна на множестве X.*

Для доказательства применим теорему для последовательностей к последовательности частичных сумм, элементы которой непрерывны в силу непрерывности каждого слагаемого (что дано по условию).

Теорема о почленном дифференцировании ряда особенно полезна будет при изучении степенных рядов. Начнём, конечно, с соответствующей теоремы для последовательностей.

Теорема 2. ***(Интегрируемость).*** *Пусть функции $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и равномерно сходятся на этом отрезке к функции f. Тогда функция f интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, а любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём, поэтому $f \in R[a,b]$.

Так как $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, а тогда при тех же $\varepsilon > 0$ и N для всех $n > N$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon(b-a),$$

что в силу произвольности ε означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$. □

Пример 2. *Последовательность $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ сходится при каждом $x \in [0,1]$. Действительно, при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем $f_n(0) = f_n(1) = 0$, а в точках интервала $(0,1)$ справедливы неравенства $0 < 1 - x^2 < 1$, поэтому $(1-x^2) \to 0,\ n \to \infty$, откуда следует, что при фиксированном $x \in (0,1)$*

$$\lim_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n = 0.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ сходится к тождественному нулю на отрезке $[0,1]$, а тогда

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\cdot dx = 0.$$

Однако

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} \ne 0.$$

Интеграл предела не равен пределу интегралов, так как сходимость последовательности $\{f_n\}$ на отрезке $[0,1]$ неравномерная. Действительно, $f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, причём с увеличением n множитель $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ не стремится к нулю, так как его предел при $n \to \infty$ равен $1/e$, а $\sqrt{n}$ вообще стремится к $+\infty$. Это значит, что сразу для всех $x \in [0,1]$ при достаточно больших n величины $f_n(x)$ не являются достаточно малыми, то есть сходимость к нулю неравномерная.

Теперь сформулируем аналогичную теорему для рядов.

Теорема 3. ***(Интегрируемость ряда).*** *Пусть функции $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходятся на этом отрезке к функции S. Тогда функция S интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство. Снова рассуждения из соответствующей теоремы для последовательностей применяются к последовательности частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, так как интеграл суммы равен сумме интегралов. □

В обеих теоремах этого раздела непрерывность можно заменить на интегрируемость на том же отрезке, и результат останется верным, но нам для наших дальнейших целей такие варианты теорем о почленном интегрировании не нужны.

Дифференцируемость при равномерной сходимости

Наконец, сформулируем самую трудную теорему о почленном дифференцировании равномерно сходящейся последовательности.

Теорема 4. ***(Дифференцируемость).*** *Пусть все функции последовательности $\{f_n\}$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$ (на концах имеется в виду односторонняя дифференцируемость), а функции f_n' непрерывны на этом отрезке и последовательность $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a,b]$. Пусть также последовательность $f_n(x_0)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой функции f, причём f дифференцируема на интервале $[a,b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x)$.*

Доказательство. Пусть x – произвольная точка интервала $[a,b]$, отличная от x_0. Заметим, что в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |(f_n'(\xi) - f_m'(\xi))(x - x_0)| <$$
$$< |(f_n'(\xi) - f_m'(\xi))|(b-a),\ \xi \in (x, x_0).$$

Так как последовательность $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что при всех $n,m > N$ $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon$, а также (в силу сходимости $\{f_n(x_0)\}$) $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$.

Тогда получим, что при всех $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что при всех $n,m > N$ и всех $x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (b-a+1)\varepsilon,$$

то есть для последовательности $\{f_n\}$ выполнен критерий Коши равномерной сходимости на интервале $[a,b]$. Предел этой последовательности обозначим через f.

Так как все функции последовательности $\{f_n'\}$ дифференцируемы на $[a,b]$, то они и непрерывны на (a,b), поэтому, если обозначить их предел через g, то и функция g, непрерывна, а тогда для любой $x \in [a,b]$ она интегрируема на отрезке $[x_0, x]$ и по предыдущей теореме

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} g(t)dt,$$

причём формулу Ньютона – Лейбница мы можем применить именно в силу непрерывности производных. Тогда для каждого $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

$\square$

Пример 3. *Последовательность* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ *сходится к константе* $f(x) = 0$ *при каждом* $x \in \mathbb{R}$, *причём сходимость равномерная. Это следует из того, что*

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to \infty.$$

Тогда $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = 0' = 0$. *Однако*

$$\left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right)' = \sqrt{n}\cos(nx)$$

и, например, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty \ne 0$. *Здесь теорема не работает, так как последовательность производных, как показано выше, не сходится равномерно на всей прямой.*

Теперь сформулируем аналогичную теорему для рядов.

Теорема 5. ***(Дифференцируемость ряда).*** *Пусть все функции последовательности* $\{f_n\}$ *дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$, *а функции* f_n' *непрерывны на этом отрезке и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Пусть также ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *сходится в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится на* $[a, b]$ *к некоторой функции* $S(x)$, *причём* S *дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$, *то есть*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Доказательство. Так как производная суммы равна сумме производных, то последовательность частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ удовлетворяет всем условиям аналогичной теоремы для последовательностей. Далее для последовательности частичных сумм повторяются все рассуждения из доказательства соответствующей теоремы для последовательностей. $\square$