Лекция 7

Степенные ряды

Мы переходим к важному классу функциональных рядов – степенным рядам. многие свойства этих рядов оказываются полезными при приближённых вычислениях, решениях дифференциальных уравнений и во многих прикладных задачах.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \tag{1}$$

где последовательность $\{a_n\}$ называется состоит из элементов, называемых коэффициентами ряда (1). В общем случае рассматриваются ряды, для которых коэффициенты и переменная принимают комплексные значения, однако мы пока остановимся на случае вещественных коэффициентов и вещественной переменной. В этом случае мы докажем, что областью сходимости степенного ряда может быть точка a, ограниченный промежуток или вся прямая. Отметим, что замена $x - a = t$ позволит нам рассматривать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \tag{2}$$

который сходится в точке $t = 0$. При этом с рядом (2) проще работать, а все свойства ряда (2) выполнены и для ряда (1), поэтому в дальнейшем мы будем формулировать все свойства для ряда (2).

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n$ сходится только при $-1 < t < 1$, так как при других t общий член этого ряда не стремится к нулю, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot t^n$ сходится при любых $t \in \mathbb{R}$, так как по признаку Д'аламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^{n+1}/(n+1)!)}{|t|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|t|)}{n+1} = 0 < 1.$$

При этом, скажем, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \cdot t^n$ сходится только при $t = 0$, так как при любом $t \neq 0$ последовательность $\{n! \cdot n!\}$ не стремится к нулю. Таким образом, мы видим, что область сходимости степенного ряда зависит от его коэффициентов.

Сейчас мы докажем несколько теорем, в которых проясним, как устроено само множество сходимости степенного ряда и как это множество может быть связано с коэффициентами этого ряда.

Теорема 1. *Если ряд (2) сходится в отличной от нуля точке $t = t_0$, то он сходится абсолютно при $|t| < |t_0|$.*

Доказательство. Имеем $|a_n t^n| = |a_n| \cdot |t_0|^n \left|\frac{t}{t_0}\right|^n$, причём в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t_0^n$ выполнен необходимый признак, а тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \cdot |t_0|^n = 0$, откуда следует, что существует такая константа $C > 0$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|a_n| \cdot |t_0|^n < C$. Тогда $|a_n| \cdot |t_0|^n \left|\frac{t}{t_0}\right|^n < C \left|\frac{t}{t_0}\right|^n$, причём ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C \left|\frac{t}{t_0}\right|^n$ сходится как бесконечно убывающая арифметическая прогрессия при всех t, таких, что $0 < |t| < |t_0|$ и сходится при $t = 0$. тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n t^n|$ сходится по признаку сравнения при всех t, таких, что $|t| < |t_0|$. Таким образом, ряд (2) сходится абсолютно при всех таких t. □

Отсюда следует, что областью сходимости ряда (2) является промежуток интервал, полуинтервал или отрезок с с центром в точке $t=0$ или вся прямая. В случае конечного промежутка существует такое положительное число R, что при всех $t:|t|>R$ ряд (2) расходится, а при всех $t:|t|<R$ – сходится. Это число называется *радиусом сходимости* степенного ряда (2). В случае ряда (1) с такими же коэффициентами, что у (2) вместо интервала $(-R,R)$ рассматривается интервал $(a-R,a+R)$. Если же ряд (2) сходится на всей прямой, то полагают $R=+\infty$.

Иногда удаётся найти R как предел некоторых соотношений между коэффициентами.

Теорема 2. *1) Если существует* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, *то он равен* $1/R$.

Если этот верхний предел равен бесконечности, то ряд (2) сходится только при $t=0$, *а если верхний предел равен 0, то ряд (2) сходится на всей прямой.*

2) Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *то он равен* $1/R$.

Если этот предел равен бесконечности, то ряд (2) сходится только при $t=0$, *а если он равен 0, то ряд (2) сходится на всей прямой.*

Доказательство. **1)** К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nt^n|$ применим радикальный признак Коши:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nt^n|}=t\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Таким образом, если $|t|<\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nt^n|$ сходится по признаку Коши, а если $|t|>\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$, то этот ряд расходится по признаку Коши. Итак, ряд (2) абсолютно сходится при $|t|<R$, а при $|t|>R$ расходится, где

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2) К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nt^n|$ применим признак Д'аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}t^{n+1}|}{|a_nt^n|}=|t|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

откуда получим, что при $|t|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ ряд (2) сходится абсолютно, а при $|t|>\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ расходится. □

Пример 1. *1) Рассмотрим уже встречавшийся ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot t^n$. *По формуле из пункта 2 предыдущей теоремы*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Таким образом, $R=+\infty$, *то есть исследуемый ряд сходится на всей прямой.*

2) Снова рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\cdot t^n$. *По формуле из пункта 2 предыдущей теоремы*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$$

Таким образом, $R=0$, *то есть исследуемый ряд сходится только при* $t=0$.

3) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$. По формуле из пункта 1 предыдущей теоремы

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1/n^2|} = 1,$$

поэтому этот ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. Отметим, что при $t = \pm 1$ этот ряд также сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Таким образом, исследуемый ряд сходится на отрезке $[-1, 1]$.

4) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$. По формуле из пункта 1 предыдущей теоремы

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1/n|} = 1,$$

поэтому этот ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. При этом при $t = -1$ ряд сходится, так как является рядом Лейбница, а при $t = 1$ ряд расходится, так как является гармоническим. Таким образом, областью сходимости нашего ряда является полуинтервал $[-1, 1)$.

Заметим, что в пунктах 3 и 4 мы могли применить и формулу из пункта 2 предыдущей теоремы, которая тоже привела бы к правильному ответу. Иначе дело обстоит со следующим пунктом.

5) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^{n!}$. Этот ряд является степенным, причем его коэффициенты при степенях с показателями, равными факториалам, равны 1, а при других степенях равны 0, то есть имеем сумму

$$1 \cdot x^{0!} + 1 \cdot x^{1!} + 1 \cdot x^{2!} + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 1 \cdot x^{6!} + \ldots .$$

Таким образом, последовательность коэффициентов $\{a_n\}$ задаётся так:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = k!, \\ 0, & n \neq k!. \end{cases}$$

Это означает что у последовательности коэффициентов два частичных предела, равные 0 и 1. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, то есть радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^{n!}$ равен 1, а значит этот ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. На концах интервала ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Итак, как мы увидели в примере, на концах интервала $(-R, R)$, называемого *интервалом сходимости,* ряд может как сходиться, так и расходиться.

Равномерная сходимость степенных рядов

Далее обсудим функциональные свойства суммы степенного ряда.

Предложение 1. *Пусть R – радиус сходимости ряда (2). Тогда при любом $q \in (0, R)$ ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-q, q]$.*

Доказательство. Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n q^n|$ сходится по условию теоремы, поэтому при всех $t \in [-q, q]$ ряд (2) сходится по признаку сравнения, а тогда он сходится и равномерно в силу мажорантного признака Вейерштрасса. $\square$

Из этого предложения следует, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости. При этом на самом интервале сходимости ряд может сходиться и неравномерно, как, например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$.

Теорема 3. *Пусть* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, *а* $(-R, R)$ *интервал сходимости ряда (2). Тогда функция* f *непрерывна на интервале* $(-R, R)$.

Доказательство. Так как все функции $f_n(t) = a_n t^n$ непрерывны на интервале $(-R, R)$ и при любом $q \in (0, R)$ ряд (2) равномерно сходится на отрезке $[-q, q]$, то сумма ряда (2) как равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций непрерывна на отрезке $[-q, q]$. С другой стороны, это означает, что если мы возьмём произвольную точку $t_0 \in (-R, R)$, то можно подобрать такое $q \in (0, R)$, что t_0 лежит внутри отрезка $[-q, q]$. Таким образом, функция f непрерывна в любой точке интервала $(-R, R)$, что означает её непрерывность на всём интервале. $\square$

Из этой теоремы следует важное свойство единственности степенного ряда.

Предложение 2. ***(Единственность степенного ряда).*** *Если два степенных ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *сходятся к одной и той же сумме в некоторой окрестности нуля, то* $a_n = b_n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n f(t) = f(t)$. Тогда при $t = 0$ имеем $a_0 = b_0 = f(0)$. Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n t^n$, поэтому обе части этого равенства будут равны при любом $t \neq 0$, а тогда, деля на $t \neq 0$, получим, что равенство функций $a_0 = b_0 = f(0)$. Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n t^{n-1}$, причём это снова два степенных ряда, суммы которых равны при ненулевых t, принадлежащих интервалу сходимости исходных рядов. Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to 0$, получим $a_1 = b_1$. Далее, рассуждая аналогично, получим при всех рассматриваемых n, что $a_n = b_n$. $\square$

Следующие факты бывают полезны при нахождении сумм некоторых рядов.

Предложение 3. *Если ряд (2) сходится при* $t = R$, *то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$ *(здесь* R, *как и выше, обозначает радиус сходимости).*

Доказательство. Имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n \frac{t^n}{R^n}$, причём последовательность $\{\frac{t^n}{R^n}\}$ ограниченна числом 1 и монотонна при всех $t \in [0, 1]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ сходится по условию. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n \frac{t^n}{R^n}$ сходится равномерно по признаку Абеля. $\square$

Теорема 4. ***(Теорема Абеля).*** *Если ряд (2) сходится при* $t = R$, *то его сумма непрерывна в этой точке справа, то есть*

$$\lim_{t \to R-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n.$$

Доказательство. Эта теорема, в силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ на отрезке $[0, R]$ является следствием теоремы о перестановке суммы и предела для равномерно сходящегося ряда. $\square$

Пример 2. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$ *имеет радиус сходимости* $R = 1$, *что легко проверить с помощью формул из теоремы выше. Из материалов второго семестра мы знаем, что сумма этого ряда равна* $\ln(1+t)$ *на интервале* $(-1, 1)$. *При* $t = 1$ *этот ряд сходится, так как является рядом Лейбница, поэтому, как следует из предложения выше, он равномерно сходится на отрезке* $[0, 1]$ *и поэтому его сумма непрерывна слева в этой точке, а тогда она равна* $\ln 2$.

Дифференцируемость и интегрируемость

Теоремы ниже несложно вывести из соответствующих теорем для функциональных рядов, но они позволяют находить суммы рядов и раскладывать функции в степенные ряды. Пользу этих теорем постараемся продемонстрировать с помощью примеров на следующей лекций.

Теорема 5. ***(Почленное дифференцирование степенного ряда).*** *Сумма ряда (2) дифференцируема на всём интервале сходимости* $(-R, R)$, *причём*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n t^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n+1} t^{n-1}.$$

При этом радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n+1} t^{n-1}$ *такой же, как у ряда (2), но поведение на концах интервала сходимости может измениться. Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n+1} t^{n-1}$ *сходится в точке* $t = R$, *то в этой точке существует односторонняя производная суммы ряда (2), равная ряду из производных элементов ряда (2) в этой точке.*

Доказательство. Нам необходимо проверить все условия теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда.

То, что ряд из самих функций сходится хотя бы в одной точке, выполнено, так как наш ряд (2) сходится на всём интервале $(-R, R)$.

Производные элементов ряда (2) равны $n a_{n+1} t^{n-1}$ и, очевидно, непрерывны.

Проверим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n+1} t^{n-1}$ равномерно сходится на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < R$. Так как это степенной ряд, то нужно просто проверить сходимость в любой точке t_0, такой, что $0 < t_0 < R$. Выберем любое такое q, что $t_0 < q < R$. Тогда

$$|n a_n t_0^{n-1}| = \frac{1}{|t_0|} \, |a_n q^n| \cdot \left| n \frac{t_0}{q} \right|^n,$$

и так как ряд (2) сходится в точке $t = q$, то $|a_n q^n| \to 0, \ n \to \infty$, поэтому при достаточно больших n

$$\frac{1}{|t_0|} \, |a_n q^n| \cdot \left| n \frac{t_0}{q} \right|^n \leq \frac{1}{|t_0|} \left| n \frac{t_0}{q} \right|^n,$$

причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| n\frac{t_0}{q} \right|^n$ сходится в силу признака Д'аламбера, так как

$$\frac{\left|(n+1)\frac{t_0}{q}\right|^{n+1}}{\left|n\frac{t_0}{q}\right|^n} = \frac{n+1}{n}\left|\frac{t_0}{q}\right| \to \left|\frac{t_0}{q}\right| < 1.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t^{n-1}$ сходится во всех точках, в которых сходится ряд (2). Тогда в силу того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t^{n-1}$ степенной, он сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в интервале $(-R, R)$, как и ряд (2).

Итак, ряд (2) сходится, производные его элементов непрерывны, а ряд из производных сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости, поэтому на любом таком отрезке к ряду (2) применима теорема о почленном дифференцировании функционального ряда. Таким образом, в любой точке интервала сходимости ряда (2) теорема о почленном дифференцировании выполнена. Если ряд из производных сходится и в точке $t = R$, то такие рассуждения справедливы и для этой точки, только берётся левая производная.

Теперь проверим, что совпадают радиусы сходимости. Выше мы доказали, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t^{n-1}$ сходится во всех точках, в которых сходится ряд (2). Обратно, если R' является радиусом сходимости ряда из производных и при $t = t_0 \neq 0$, $t_0 \in (-R', R')$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t_0^{n-1} = \frac{1}{t_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t_0^{n}$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |na_{n+1}t_0^n|$, а тогда в силу неравенства $|a_nt_0^n| \leq n|a_nt_0^n|$ ряд (2) сходится при $t = t_0$ по признаку сравнения. Таким образом, интервалы сходимости ряда (2) и ряда из производных его элементов совпадают, то есть $R' = R$.

Наконец, покажем, что поведение на концах может измениться. Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$. Он сходится на отрезке $[-1, 1]$, а ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ сходится на полуинтервале $[-1, 1)$. $\square$

Отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t^{n-1}$ снова можно почленно дифференцировать. Дифференцирование можно проводить сколько угодно раз, поэтому справедлив следующий факт: *сумма степенного ряда (2) бесконечно дифференцируема на интервале сходимости $(-R, R)$ этого ряда, причём ряд из производных порядка n элементов ряда (2) сходится к производной порядка n суммы этого ряда в каждой точке интервала сходимости.*

Теорема 6. ***(Почленное интегрирование степенного ряда).*** *Для любого $q \in [0, R)$ ряд (2) можно почленно интегрировать на отрезке $[-q, q]$, причём*

$$\int\limits_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nu^n\right) du = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t a_nu^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}t^{n+1}.$$

Если ряд (2) сходится в точке $t = R$, то интегрирование можно производить на любом отрезке $[x_0, R]$, где $-R < x_0 < R$. При этом радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}t^{n+1}$ такой же, как у ряда (2), но поведение на концах интервала сходимости может измениться.

Доказательство. Так как общий член ряда (2) $a_n t^n$ представляет собой непрерывную функцию и, как было показано выше, сходимость ряда (2) на любом отрезке $[-q, q] \subset (-R, R)$ равномерная, то применима теорема о почленном интегрировании функционального ряда, так что первая часть теоремы доказана.

Если ряд (2) сходится в точке $t = R$, то, как было показано выше, он равномерно сходится на отрезке $[0, R]$, поэтому снова применима теорема о почленном интегрировании.

Пусть R' – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$. Применяя к этому степенному ряду теорему о почленном дифференцировании степенных рядов, получим, что ряд из производных – это как раз ряд (2). Из предыдущей теоремы следует, что $R' = R$.

Для того, чтобы продемонстрировать, что поведение на концах может измениться, достаточно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$, который сходится на полуинтервале $[-1, 1)$. Ряд из интегралов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$ сходится уже на отрезке $[-1, 1]$. □

Заметим, однако, что *у ряда из интегралов сходимость в концевой точке может лишь появиться, а у ряда из производных – лишь пропасть.*