Лекция 8

Ряды Тейлора

Это завершающая лекция о функциональных рядах. На ней мы узнаем, как устроены степенные ряды и какие функции можно раскладывать в степенные ряды.

Определение 1. *Пусть функция f бесконечно дифференцируема в точке a. Рядом Тейлора функции f называется формальная бесконечная сумма* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Контрольный вопрос. Как устроены ряды Тейлора для многочленов?

Степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости – это обязательно ряд Тейлора своей суммы. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *сходится на интервале* $(-R, R)$ $(R > 0)$ *к функции* $f(x)$. *Тогда* $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость f на интервале $(-R, R)$ следует из теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда. Имеем:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \Rightarrow f(a) = a_0;$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = a_1 + na_2(x-a) + ... \Rightarrow f'(a) = a_1;$$

$$f''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2(x-a) + ... \Rightarrow f''(a)/2 = a_2;\ ...$$

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)a_n(x-a)^{n-k} =$$

$$= k!a_k + (k+1) \cdot k \cdot ... \cdot 2 \cdot a_{k+1}(x-a) + ... \Rightarrow \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = a_k.$$

Таким образом, последовательно применяя теорему о почленном дифференцировании, можем вычислить все коэффициенты. □

Итак, если функцию f удалось разложить в ряд по натуральным степеням $x - a$ (то есть в степенной ряд в точке a), сходящийся к ней в некоторой окрестности точки a, то это обязательно её ряд Тейлора, то есть *функцию можно разложить в степенной ряд единственным образом, а коэффициент при* $(x-a)^k$ *равен* $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Пример 1. *Пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + ...,$$

откуда, учитывая единственность разложения функции в степенной ряд, мы можем утверждать, что правая часть является рядом Тейлора функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *Этот ряд сходится к функции f на интервале* $(-1,\ 1)$, *а кроме того* $f^{(2k-1)}(0) = 0$, *а* $f^{(2k)}(0) = (-1)^k \cdot k!$ *при всех натуральных k.*

Обратим внимание, что в этом примере функция была разложена в ряд без применения производных, а только лишь с использованием формулы суммы бесконечно убывающей прогрессии, но это в любом случае именно ряд Тейлора.

Функция вещественной переменной называется *аналитической в точке* a, если она бесконечно дифференцируема в точке a и её ряд Тейлора, построенный в точке a, сходится к ней при всех x из некоторой окрестности точки a.

Бывают функции, ряды Тейлора которых сходятся к ним ровно в одной точке (то есть функции, дифференцируемые в точке бесконечно много раз, но не являющиеся аналитическими в этой точке). Приведём *пример Коши неаналитической функции.*

Пример 2. *Пусть* $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ *Тогда* f *бесконечно дифференцируема на прямой и при всех натуральных* n $f^{(n)}(0) = 0$. *Докажем этот факт с помощью индукции. Мы хотим доказать, что* $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ *где* $P_n(t)$ *– некоторый многочлен степени не выше* $3n$.

`База индукции.` *При* $x \neq 0$ $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ *по теореме о производной сложной функции; производная в нуле вычисляется по определению:*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0,$$

где $t = 1/x$. *Таким образом, база индукции проверена.*

`Предположение индукции.` *Пусть при* $n = k$ $f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ *где* $P_k(t)$ *– некоторый многочлен степени не выше* $3n$.

`Шаг индукции.` *При* $n = k + 1$ *имеем при* $x \neq 0$

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = (P_k(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}})' = -\frac{1}{x^2}P_k'(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^2}P_k(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{k+1}(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_{k+1}(t) = 2t^3P_k(t) - t^2P_k'(t)$, *откуда следует, что степень* P_{k+1} *не больше* $3k + 3$ *по предположению индукции. Если* $x = 0$, *то*

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}P_k(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{tP_k(t)}{e^{t^2}} = 0.$$

У этой функции ряд Тейлора в точке $a = 0$ *состоит только из нулевых слагаемых, а сама функция* f *не равна нулю ни в какой проколотой окрестности точки* $a = 0$. *Таким образом, ряд Тейлора функции* f *сходится к* f *только в точке 0, то есть* f *не совпадает со своим рядом Тейлора ни в какой проколотой окрестности нуля, а поэтому* f *не является аналитической. Ниже изображён эскиз графика функции* f.

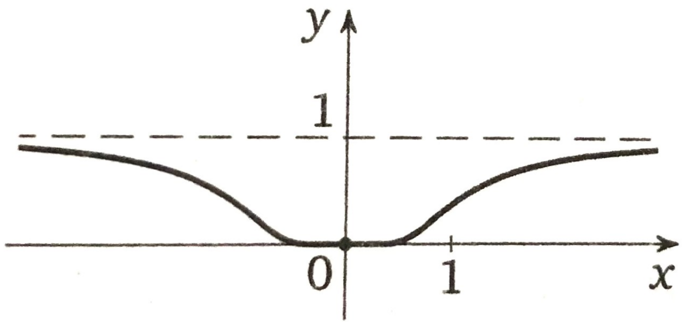

Рис. 1: Функция равна нулю только в начале координат

Достаточные условия разложения в ряд Тейлора

Возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять вещественная функция f, чтобы её ряд Тейлора сходился к ней не только в точке a, а и в некоторой окрестности этой точки, то чтобы функция являлась аналитической. Для этого многочлен Тейлора этой функции должен с увеличением степени все меньше отличаться от самой функции в каждой точке окрестности.

Приведём достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора. Мы увидим, что требование состоит в том, чтобы производные функции f росли в определённом смысле не очень быстро.

Теорема 2. *Пусть $r > 0$ и функция f дифференцируема на интервале $(a - r, a + r)$ (то есть в каждой его точке). Пусть существуют такие положительные константы C и M, что $|f^{(n)}(x)| \le C \cdot M^n$ при всех $x \in (a - r, a + r)$ и всех натуральных n. Тогда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ при всех } x \in (a-r, a+r).$$

Доказательство. Покажем, что при любом фиксированном $x \in (a - r, a + r)$ частичные суммы ряда Тейлора стремятся к значению $f(x)$. Действительно, используя форму Лагранжа, получим:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}((c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \right| \le \frac{C(rM)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty.$$

□

Отметим, что у функции из последнего примера (примера Коши) производная имеет всё более высокую скорость роста при увеличении порядка этой производной, то есть достаточным условиям из последней теоремы эта функция не удовлетворяет.

Условия доказанной теоремы можно усилить, то есть допускается, чтобы рост производных был и больше, чем в условии, но мы не будем обсуждать эти условия.

Разложения основных элементарных функций

Рассмотрим примеры применения доказанной в прошлом разделе теоремы, попутно получив разложения основных элементарных функций.

Пример 3. *1) Пусть $f(x) = e^x, x \in (-r, r)$. Тогда f дифференцируема на этом интервале и при $x = 0$ справедливы равенства $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = ... = (e^x)^{(n)} = 1$. Кроме того, $f^{(n)}(x) < e^r$ при всех $x \in (-r, r)$. Таким образом,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Так как изначально в качестве r можно выбрать любое положительное число, то разложение экспоненты в ряд Тейлора справедливо при всех вещественных x.

2) Для чётных производных синуса в нуле верны равенства

$$\sin 0 = \sin''(0) = ... = \sin^{(2k)}(0) = 0,$$

а для нечётных в нуле – равенства

$$\sin'(0) = \cos 0 = 1,\ \sin'''(0) = -\cos 0 = -1,\ ...,\ \sin^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}\cos 0 = (-1)^{k-1}$$

при всех натуральных k, то есть чётные производные синуса в точке $a = 0$ равны нулю, а нечётные в той же точке чередуются, то есть первая равна 1, вторая равна -1, третья снова равна 1 и так далее. При любом вещественном x $\sin^{(n)} x \leq 1$, поэтому при $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

3) Рассуждения для косинуса совершенно аналогичны. Так как при любом вещественном x $\cos^{(n)} x \leq 1$, то справедливо равенство

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}.$$

4) Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Как мы знаем, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, поэтому при всех таких x, что $0 < |x| < 1$, можем записать, пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,\ 0 < |x| < 1.$$

Можно непосредственно убедиться, что равенство остаётся справедливым при $x = 0$ и $x = 1$, то есть ряд для логарифма остаётся сходится к логарифму при $x \in (-1, 1]$.

5) Получим разложение степенной функции:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

При $\alpha = 0$ функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ является тождественной единицей, а при $\alpha \in \mathbb{N}$ функция f раскладывается с помощью бинома Ньютона, поэтому для нас новый случай, когда $\alpha \neq 0,\ 1,\ 2,\ \dots$. Вычислим производные f в нуле:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha; f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)...$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1).$$

Подставляя эти производные, мы и получим ряд Тейлора.

При $n > \alpha$ в точке $x = -1$ не существует производная $f^{(n)}$, поэтому радиус сходимости ряда Тейлора удовлетворяет неравенству $R \leq 1$. Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot ... \cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1.$$

Таким образом, ряд Тейлора для $f(x) = (1+x)^\alpha$ сходится на интервале $(-1, 1)$. В точке $x = -1$ этот ряд может как сходиться (при $\alpha > 0$, абсолютно), так и расходиться (при $\alpha < 0$). В точке $x = 1$ ряд сходится только при $\alpha > -1$, причём при $\alpha > 0$ он сходится абсолютно, а при $\alpha \in (-1, 0)$ – условно. Для проверки сходимости рядов в точках $x = \pm 1$ можно использовать признак Гаусса.

б) На примере функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ещё раз посмотрим, как помогают теоремы о почленном дифференцировании и почленном интегрировании при разложении в ряд. Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

причём ряд сходится при $|x| < 1$, так как иначе общий член не стремится к нулю. Снова интегрируя, получим

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Степенные ряды на комплексной плоскости и комплексная экспонента

Степенные ряды естественнее рассматривать на комплексной плоскости, то есть изучать сходимость рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $a \in \mathbb{C}$ и $c_n \in \mathbb{C}$ при всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, а переменная z принимает комплексные значения.

Ряд из комплексных чисел $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)$ сходится, если сходится каждый из рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$, причём если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = A$, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = B$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = A + iB$.

Под областью сходимости степенного ряда естественно понимать такие значения z, при каждом из которых получающийся ряд из комплексных чисел сходится. Точно также существуют ряды, сходящиеся в точке, на ограниченном множестве или на всей комплексной плоскости. Ограниченное множество представляет собой круг на комплексной плоскости вида $|z - a| < R$. Это именно круг, так как если $z = x + iy$, а $a = \alpha + i\beta$, то по определению модуля комплексного числа

$$|z - a| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2},$$

то есть

$$|z - a| < R \ \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < R^2.$$

Если степенной ряд сходится при некотором $z = b$, то он обязательно сходится вместе с рядом из модулей его элементов (то есть абсолютно) при всех z, таких, что $|z - a| < |b|$, то есть областью сходимости всегда будет круг на комплексной плоскости, а поведение на границе этого круга бывает различным.

Формальная замена вещественной переменной x на комплексную переменную z делает из изученного нами выше ряда Тейлора комплексный степенной ряд, который также будет рядом Тейлора, но уже комплексной функции, которая при ограничении на вещественную ось совпадает с суммой исходного ряда Тейлора. При этом центр круга сходимости такого ряда лежит на вещественной оси, а интервал сходимости представляет собой лежащий на вещественной оси диаметр круга сходимости.

С точки зрения комплексных степенных рядов можно объяснить некоторые особенности поведения рядов Тейлора для вещественных функций. Выше мы видели, что

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

причём ряд сходится при $|x| < 1$, так как иначе общий член не стремится к нулю.

Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ имеет все производные, но исследовать применимость достаточных условий разложения в ряд Тейлора будет сложно из-за громоздких формул, возникающих при вычислении этой производной при $x \in \mathbb{R}$. Однако полезно выяснить, почему сходимость её ряда Тейлора имеет место только на интервале от $(-1, 1)$. Причина становится ясна, если рассмотреть функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ уже на комплексной плоскости. У этой функции знаменатель обращается в ноль при $z = \pm i$, то есть в верхней и нижней точке границы круга $|z| < 1$. Таким образом, областью сходимости ряда Тейлора для $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ может являться только единичный круг, а тогда и высекать на вещественной оси он будет только интервал $(-1, 1)$.

Экспоненту от комплексной переменной $f(z) = e^z$ вводят с помощью ряда:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Так как

$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0, n \to \infty,$$

то этот ряд абсолютно сходится на всей комплексной плоскости в силу признака Даламбера.

С помощь такого определения экспоненты можно доказать и её основные функциональные свойства. Например, можно оказать, что при всех комплексных z и w $e^{z+w} = e^z e^w$.

Если $x \in \mathbb{R}$ и в ряд подставляется $z = ix$, то, учитывая, что ряд абсолютно сходится на всей комплексной плоскости, и то, что $i^2 = -1,\ i^3 = -1,\ i^4 = 1$ и так далее, получаем

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^2 k + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \cos x + i \sin x,$$

то есть при всех вещественных x справедлива *формула Эйлера*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Можно показать, что эта формула остаётся справедливой, если вместо $x \in \mathbb{R}$ подставить $z \in \mathbb{C}$.

Так как $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, через экспоненту можно определить комплексные функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{и} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Полезно сравнить эти формулы с формулами, через которые мы определяли гиперболические функции $f(x) = \operatorname{sh} x$ и $g(x) = \operatorname{ch} x$. Можно проверить, что все основные формулы тригонометрии сохраняются и на комплексной плоскости.