Лекция 1

Скалярное произведение и ортонормированные системы функций

Для того, чтобы лучше понимать терминологию, полезно вспомнить материал про евклидовы пространства. Сейчас мы рассмотрим евклидовы пространства, элементами (то есть векторами) в которых будут функции. При этом при построении теории нам будут полезны материалы про функциональные ряды, которые мы уже изучили.

Если рассмотреть все числовые функции, заданные на отрезке $[a, b]$, то сумма двух таких функций снова будет функцией, заданной на этом отрезке, как и произведение любой такой функции на действительное число. Кроме того, в этом множестве лежит функция, принимающая в каждой точке этого отрезка нулевое значение, а также для произвольной функции f, заданной на $[a, b]$, можно определить противоположную, которая в любой точке $x \in [a, b]$ принимает значение $-f(x)$. Можно проверить, что для множества всех числовых функций на $[a, b]$ выполнены и остальные свойства из определения векторного пространства, которое мы изучали в курсе линейной алгебры. Таким образом, множество всех функций на отрезке $[a, b]$ является векторным пространством, а тогда можно задаться вопросом, какова размерность этого пространства и какие примеры базисов этого пространства мы можем привести. Как мы знаем из курса дифференциальных уравнений, что при различных вещественных λ любой конечный набор функций вида $f(x) = e^{\lambda x}$ линейно независим, поэтому в этом множестве поэтому такое пространство не является конечномерным. В нём существуют базисы из бесконечного множества векторов, но мы не будем изучать эти базисы, так как эти разделы математики не относятся к интересующим нас вопросам. Однако ниже мы будем изучать возможность представить функцию в виде ряда из бесконечного набора заданных функций с некоторыми коэффициентами.

Вместо всех вообще функций на отрезке $[a, b]$ мы могли бы рассматривать все непрерывные функции (соответствующее линейное пространство обозначается $C[a, b]$) или все дифференцируемые функции, производные которых являются непрерывными (оно обозначается $C^1[a, b]$). По отношению к введённому выше пространству всех функций два этих пространства являлись бы подпространствами. Можно было бы рассматривать и пространства с другими свойствами, объединяющими все входящие в них функции. Важно только, чтобы эти свойства не нарушались при умножении функции на число и при сложении функций и чтобы вообще выполнялись все аксиомы векторного пространства. Например, функции, принимающие в фиксированной точке отрезка $[a, b]$ значение 1, не являются векторным пространством, так как сумма таких функций в этой точке ужа равна 2, да и тождественный нуль не принадлежит такому множеству.

Для дальнейшего нам потребуется ввести понятие скалярного произведения. От скалярного произведения мы потребуем тех же свойств, что и при изучении евклидовых пространств, то есть скалярным произведением функций на некотором векторном пространстве функций, заданных на отрезке $[a, b]$ будет называться симметрическая билинейная форма, которая каждой паре функций ставит в соответствие число, причем скалярное произведение любой функции на себя неотрицательно и равно нулю только для тождественно нулевой функции. Скалярное произведение функций f и g, заданных на отрезке $[a, b]$, будем обозначать (f, g). Итак, мы хотим, чтобы для всех функций f, g и h из рассматриваемого пространстве выполнялись следующие условия:

1) $(f, g) = (g, f)$;

2) при всех $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$;

3) $(f, f) \geq 0$, причём $(f, f) = 0$ только в том случае, когда $f(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$.

Пусть задано скалярное произведение на некотором пространстве функций, определённых на отрезке $[a, b]$. Функции f и g будем называть **ортогональными**, если $(f, g) = 0$. **Нормой** функции f назовём величину $||f|| = \sqrt{(f, f)}$.

Мы могли бы доказать неравенство Коши – Буняковского и ввести понятие угла между функциями, но при изучении рядов Фурье нам не потребуется это делать.

Определение 1. *Назовём систему функций B ортонормированной, если для любых $f, g \in B$ функции f и g ортогональны и норма любой функции из B равна 1. Система, состоящая из попарно ортогональных функций с произвольными нормами, называется ортогональной.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. *Рассмотрим пространство $C[-1, 1]$. Проверим, что формула $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ задаёт скалярное произведение на этом пространстве, то есть убедимся, что выполнены условия 1-3.*

1) *Здесь проверка тривиальна: $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = (g, f)$.*

2) *Снова проверяется просто:*

$$(\alpha f+\beta g, h) = \int\limits_{-1}^{1}(\alpha f(x)+\beta g(x))h(x)dx = \alpha\int\limits_{-1}^{1} f(x)h(x)dx+\beta\int\limits_{-1}^{1} g(x)h(x)dx = \alpha(f, h)+\beta(g, h).$$

3) *Здесь имеем $(f, f) = \int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx \geq 0$, так как интеграл от неотрицательной на отрезке непрерывной функции принимает неотрицательное значение (известное из нашего курса свойство определённого интеграла). Из того же свойства следует, что если функция f^2 положительна хотя бы в одной точке, то в силу её непрерывности получаем, что положителен и рассматриваемый интеграл.*

Таким образом, мы получили скалярное произведение

Рассмотрим конечный набор функций $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2, f_4(x) = x^3$. Все эти функции принадлежат пространству $C[-1, 1]$. При этом

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1\cdot x dx = 0,\ (f_1, f_4) = \int\limits_{-1}^{1} 1\cdot x^3 dx = 0,\ (f_2, f_3) = \int\limits_{-1}^{1} x^3 dx = 0,\ (f_3, f_4) = \int\limits_{-1}^{1} x^5 dx = 0,$$

поэтому в этом наборе есть ортогональные функции. Однако легко проверить, что функции f_1 и f_3, а также f_2 и f_4 не ортогональны. Мы можем построить ортогональную систему функций, используя наш набор. Для этого можно применить процесс ортогонализации Грама – Шмидта (см. курс линейной алгебры). Итак, в качестве первой функции e_1 будущей ортогональной системы возьмём f_1, а тогда, так как f_1 и f_2 ортогональны, то в качестве второй функции e_2 можно выбрать f_2. Функцию e_3 будем искать в виде $e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + f_3$, где α_1 и α_2 – пока что неопределённые коэффициенты, причём потребуем равенств $(e_3, e_1) = (e_3, e_2) = 0$. Таким образом,

$$0 = (e_3, e_1) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + f_3, e_1) = \alpha_1(e_1, e_1) + \alpha_2 \cdot 0 + (e_1, f_3),$$

что равносильно $\alpha_1 = -\frac{(e_1, f_3)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} dx} = -\frac{2/3}{2} = -1/3$.

Аналогично,

$$0 = (e_3, e_2) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + f_3, e_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 (e_2, e_2) + (e_2, f_3),$$

откуда $\alpha_2 = -\frac{(e_2, f_3)}{(e_2, e_2)} = -\frac{\int\limits_{-1}^{1} x^3 dx}{\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx} = 0$. *Таким образом,* $e_3 = -\frac{1}{3} + x^2$.

Функцию e_4 *будем искать в виде* $e_4 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + f_4$, *причём*

$$(e_4, e_1) = (e_4, e_2) = (e_4, e_3) = 0.$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\beta_1 = -\frac{(e_1, f_4)}{(e_1, e_1)} = 0, \beta_2 = -\frac{(e_2, f_4)}{(e_2, e_2)} = -3/5, \beta_3 = -\frac{(e_3, f_4)}{(e_3, e_3)} = -\frac{\int\limits_{-1}^{1} (-\frac{1}{3} + x^2) x^3 dx}{\int\limits_{-1}^{1} (-\frac{1}{3} + x^2)^2 dx} = 0,$$

поэтому $e_4 = -\frac{3}{5}x + x^3$. *Чтобы сделать эту систему ортонормированной, разделим каждую из функций на её норму:*

$$\frac{e_1}{||e_1||} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \frac{e_2}{||e_2||} = \frac{x}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx}} = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{e_3}{||e_3||} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}} = \frac{9\sqrt{5}x^2}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \ \frac{e_4}{||e_4||} = \frac{x^3 - \frac{3x}{5}}{\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (x^3 - \frac{3x}{5})^2 dx}} = \frac{5\sqrt{7}x^3 - 3x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Итак, получена конечная ортонормированная система. Многочлены e_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ *представляют собой с точностью до умножения на константу первых четыре* ***многочлена Лежандра****. Построение ортогональной системы методом Грама – Шмидта можно продолжить, используя* x^4, x^5 *и т.д. и получить полную систему многочленов Лежандра. Интересующиеся могут прочитать, где и каким образом применяются эти многочлены.*

Упражнение 1. С помощью метода Грама – Шмидта постройте ортогональную систему функций на отрезке $[0, 1]$, используя набор $1, \ x, \ x^2, \ x^3$.

Пусть задана ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, где $\mathbb{N}_0$ обозначает множество всех натуральных чисел и числа 0.

Определение 2. *Числа* $c_n = (f, \varphi_n)$ *называются коэффициентами Фурье функции* f. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *называется рядом Фурье функции* f.

Обозначение $f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ подразумевает, что функции f соответствует её ряд Фурье.

Ряд Фурье не всегда сходится к порождающей его функции. Мы немного коснемся вопросов сходимости ряда Фурье, но подробное изучение этого вопроса не входит в рамки нашего курса.

Прежде всего, пусть для рассматриваемого линейного пространства (некоторых функций, заданных на $[a,b]$) скалярное произведение задаётся формулой:

$$(g,h)=\int\limits_a^b g(x)h(x)dx$$

для всех функций g и h из этого пространства.

Предложение 1. *Пусть задана ортонормированная система непрерывных функций* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ *равномерно сходится к функции* f *на отрезке* $[a,b]$. *Тогда* $a_n=c_n$, *то есть этот ряд является рядом Фурье функции* f.

Доказательство. Функция f непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Обе части равенства

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

умножим на $\varphi_k(x)$, где $k\in\mathbb{N}_0$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\varphi_k(x)$ тоже будет равномерно сходиться на $[a,b]$, так как функция φ_k непрерывна, а поэтому ограничена на $[a,b]$. По этой причине ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\varphi_k(x)$ допускает почленное интегрирование по отрезку $[a,b]$, причём

$$(\varphi_n,\varphi_k)=\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq k,\\ 1, & n=k,\end{cases}$$

так как система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ортонормированная. Таким образом,

$$c_k=(f,\varphi_k)=\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx=a_k.$$

□

Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля

Сейчас мы коснёмся вопроса о связи коэффициентов Фурье и нормы функции с этими коэффициентами.

Предложение 2. ***Минимальное свойство коэффициентов Фурье.*** *Обозначим через* $S_N=\sum\limits_{n=0}^{N} c_n\varphi_n(x)$ *частичная сумма ряда Фурье для функции* f, *а* $T_N=\sum\limits_{n=0}^{N} b_n\varphi_n(x)$ – *сумма с другими коэффициентами. Тогда*

$$(f-T_N,f-T_N)\geq(f,f)-(S_N,S_N).$$

В других обозначениях

$$||f-T_N||^2\geq||f||^2-\sum_{n=0}^{N} c_n^2.$$

При это равенство достигается только при $c_k=b_k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ N)$.

Доказательство. Вычислим скалярный квадрат функции $f-T_N$, учитывая, что $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ при $k \neq m$ и свойства скалярного произведения и преобразуем его:

$$(f-T_N, f-T_N) = (f,f)-2(f,T_N)+(T_N,T_N) = (f,f)-\sum_{n=0}^{N} b_n(f,\varphi_n)+\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\varphi_n, \sum_{n=0}^{N} b_n\varphi_n\right) =$$

$$= (f,f) - 2\sum_{n=0}^{N} b_n c_n + \sum_{n=0}^{N} b_n^2 =$$

$$= (f,f)-\sum_{n=0}^{N} c_n^2+\sum_{n=0}^{N} c_n^2-2\sum_{n=0}^{N} b_n c_n+\sum_{n=0}^{N} b_n^2 = (f,f)-\sum_{n=0}^{N} c_n^2+\sum_{n=0}^{N}(b_n-c_n)^2 \geq (f,f)-\sum_{n=0}^{N} c_n^2,$$

где последнее неравенство получено, так как сумма $\sum\limits_{n=0}^{N}(b_n - c_n)^2$ неотрицательна. Отсюда же видно, что равенство будет, если эта сумма равна нулю, что равносильно выполнению равенств $c_k = b_k$ $(k = 0,\ 1,\ ...,\ N)$. □

Доказанному предложению можно придать простой геометрический смысл: если рассматривается подпространство, базисом в котором выступает ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1,\ ...,\ N}$, то линейная комбинация S_N представляет собой проекцию функции f на это подпространство, поэтому $||f - S_N||$ равно расстоянию от f до этого подпространства.

Теорема 1. ***Неравенство Бесселя.*** *Для ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и такой функции f, что $(f,f) < +\infty$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2$ сходится и справедливо неравенство*

$$||f||^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2,$$

где, напомним, c_n – коэффициенты Фурье функции f.

Доказательство. Если в предыдущем предложении положить $c_k = b_k$ $(k = 0,\ 1,\ ...,\ N)$, то получим равенство

$$(f - S_N, f - S_N) = (f,f) - \sum_{n=0}^{N} c_n^2,$$

поэтому $(f,f) = ||f||^2 \geq \sum\limits_{n=0}^{N} c_n^2$. Это неравенство справедливо при всех $N \in \mathbb{N}$, поэтому частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2$ ограничены, а так как ряд состоит из неотрицательных членов, то он сходится по критерию сходимости для знакопостоянных рядов. Тогда в силу предельного перехода в неравенствах

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq ||f||^2.$$

□

Обозначим линейное пространство функций, на котором введено скалярное произведение, через V.

Определение 3. *1) Ортонормированная система* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *называется замкнутой в линейном пространстве* V*, если неравенство Бесселя превращается в равенство для любой* $f \in V$*, то есть*

$$||f||^2 = \sum_{n=0}^{N} c_n^2.$$

Это равенство называется ***равенством Парсеваля****.*

2) Ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *называется полной в линейном пространстве* V*, если для любой такой* $f \in V$*, что* $(f, \varphi_n) = 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}_0$*, выполняется равенство* $(f, f) = 0$*. Другими словами, к рассматриваемой ортонормированной системе нельзя добавить ещё одну ненулевую функцию, ортогональную всем функциям системы.*

Предложение 3. *Всякая замкнутая ортонормированная система является полной.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть нашлась такая $f \in V$, что $(f, f) > 0$, что равенство Парсеваля для неё выполнено, но при всех $n \in N_0$ также выполнены равенства $c_n = (f, \varphi_n) = 0$, то есть система не является полной. Это значит, что

$$0 < (f, f) = \sum_{n=0}^{N} c_n^2 = 0,$$

то есть приходим к противоречию. □

Замкнутость ортонормированной системы функций можно понимать в том смысле, что она является базисом всего пространства V, то есть ряд Фурье для функции из V является разложением по ортонормированному базису всего пространства, а коэффициенты Фурье являются координатами разложенной функции в этом базисе.