Лекция 2

Регулярные и строго регулярные функции

Определение 1. *Точка x_0 называется регулярной для функции f, если существуют левый и правый пределы f при $x \to x_0$, а значение $f(x_0)$ равно полусумме этих пределов. Саму функцию f называют регулярной в точке x_0.*

Будем рассматривать периодические функции, имеющие конечное число точек разрыва на каждом отрезке в $\mathbb{R}$ и регулярные в этих точках. Назовём такие функции **строго регулярными.** Как и в прошлой лекции, проверяется, что множество таких функций образует векторное пространство, которое обозначим W. В силу условий, которым удовлетворяют эти функции, они являются интегрируемыми на любом отрезке.

Все дальнейшие рассуждения будем проводить для 2π-периодических функций. Пространство таких функций обозначим W_π.

Пусть скалярное произведение на W_π задано следующей формулой:

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Такое скалярное произведение можно задать, так как произведение интегрируемых функций интегрируемо. Кроме того, для любой $f \in W_\pi$ выполнено условие $||f|| < +\infty$, так как квадрат интегрируемой функции интегрируем.

Тригонометрические ряды Фурье

Докажем полезное для дальнейшего утверждение.

Предложение 1. ***1)*** *Если функция $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ интегрируема на отрезке $[-a, a]$ и является на нём чётной, то есть при всех $x \in [-a, a]$ выполнено равенство $f(-x) = f(x)$, то*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

2) *Если функция $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ интегрируема на отрезке $[-a, a]$ и является на нём нечётной, то есть при всех $x \in [-a, a]$ выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$, то*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

3) *Пусть функция является T-периодической и интегрируема на отрезке $[0, T]$. Тогда f интегрируема на любом отрезке длины T и для каждого $a \in \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{0}^{T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{T+a} f(x)dx.$$

Доказательство. В обоих пунктах воспользуемся равенством

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$$

и в интеграле $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$ сделаем замену $x = -t$. Тогда $dx = -dt$, поэтому верно равенство

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt.$$

В правой части можно заменить переменную t на переменную x, так как значение интеграла от этого не изменится.

В итоге в пункте **1** имеем равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx,$$

а в пункте **2** получим

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

□

Укажем на $[-\pi, \pi]$ ортогональную систему функций, которую и будем в дальнейшем использовать для разложения в ряд Фурье.

Предложение 2. *Набор функций* $F = \{1,\ \cos(nx),\ \sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *является ортогональной системой функций на отрезке* $[-\pi, \pi.]$

Доказательство. Заметим, что при всех натуральных n функции $\sin(nx)$ являются нечётными, а функции $\cos(nx)$ – чётными на $[-\pi, \pi]$. Тождественная единица также является чётной функцией на этом отрезке, а произведение чётной и нечётной функций является нечётной функцией. Тогда, вспоминая доказанное предложение, получим, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0,$$

то есть функции $\sin(nx)$ ортогональны всем функциям $\cos(nx)$ и тождественной единице на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Кроме того, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx)dx = \sin(n\pi) - \sin(-n\pi) = 0$, а также при $m \neq n$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)dx = 0$$

и

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)dx = 0.$$

Таким образом, функции из рассматриваемого набора попарно ортогональны. $\square$

Найдём нормы функций из системы F:

$$||1|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \sqrt{2\pi},\ ||\cos(nx)|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx} = \sqrt{\pi} = ||\sin(nx)||$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in W_\pi$ назовём функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\cos(nx)\right).$$

При этом коэффициенты Фурье функции $f \in W_\pi$ вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Обратим внимание, что мы делим скалярное произведение функции f и функций системы F не на норму каждой функции этой системы, а на число π. Можно объяснить это тем, что если мы скалярно умножим формальное равенство $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\cos(nx))$ на функции из F с целью найти коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \ldots$ и $b_1,\ b_2,\ \ldots$, то для них мы и получим выписанные выше равенства, так как в правой части все слагаемые, кроме одного, исчезнут в силу ортогональности функций системы F. То, что ряд Фурье построен для функции f (то есть коэффициенты Фурье найдены по формулам выше), будем обозначать $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\cos(nx))$.

Бесконечный ряд вида $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos(nx) + B_n\cos(nx))$ называется тригонометрическим рядом. Не всякий тригонометрический ряд обязан являться рядом Фурье некоторой функции, даже если он сходится. Примером может служить ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln(en)}$, который сходится (условно) на всей прямой по признаку Дирихле, но можно доказать, что он не является рядом Фурье какой-либо функции. В силу теоремы о том, что равномерно сходящийся ряд является рядом Фурье своей суммы (см. предыдущую лекцию), мы можем убедиться, что в приведённом примере ряд сходится неравномерно.

Очень важно также отметить, что *тригонометрический ряд Фурье функции f не всегда сходится к f*. Ниже мы получим условия, при которых тригонометрический ряд Фурье сходится к порождающей его функции, а сейчас сформулируем теорему о сходимости тригонометрического ряда Фурье, которую в нашем курсе будем называть **теоремой сходимости**.

Теорема 1. *Пусть строго регулярная функция $f \in W_\pi$ в каждой точке непрерывности имеет односторонние конечные производные, а к каждой точке разрыва первого рода x_0*

существуют конечные пределы

$$\lim_{t\to 0-}\frac{f(x_0+t)-f(x_0-0)}{t} \text{ и } \lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},$$

где $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, *а* $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$. *Тогда ряд Фурье функции* f *будет сходиться к ней в каждой точке вещественной оси.*

Мы не будем приводить полное доказательство этой теоремы, однако ниже укажем схему доказательства. Пока приведём без доказательства ещё несколько фактов, которые будут нам полезны при работе с рядами Фурье.

Теорема 2. ***(Теорема Ляпунова).*** *Тригонометрическая система* F *замкнута в пространстве* W_π, *то есть для любой строго регулярной и* 2π*-периодической функции* g *справедливо равенство Парсеваля вида*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Теорема 3. ***(Единственность ряда Фурье).*** *Если коэффициенты Фурье строго регулярных функций* $f, g \in W_\pi$ *совпадают, то* $f(x)=g(x)$ *при всех* $x\in\mathbb{R}$.

Доказательство опирается на теорему Ляпунова. Действительно, из условия следует, что все коэффициенты Фурье функции $h(x) := f(x)-g(x)$ равны нулю, поэтому равенство Парсеваля принимает вид

$$(h,h)=\frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=0,$$

откуда следует, что функция h равна нулю на всей прямой, то есть $f(x)=g(x)$ при всех вещественных x.

Пример 1. *1) Разложим* $f(x)=\cos^4 x$ *в ряд Фурье на промежутке* $[-\pi,\pi]$. *Можно было бы находить коэффициенты Фурье, вычисляя интегралы*

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x dx,\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x\cos(nx)dx,\ \ b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x\sin(nx)dx,$$

но мы поступим проще, зная о том, что любая функция единственным образом раскладывается в тригонометрический ряд Фурье. Используя формулы понижения степени, имеем

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,$$

откуда видим, что $a_0=\frac{3}{4},\ a_2=\frac{1}{2},\ a_4=\frac{1}{8}$, *а остальные коэффициенты Фурье функции* f *равны нулю.*

2) Разложим $f(x)=|x|$ *в ряд Фурье на промежутке* $[-\pi,\pi]$. *Так как* f *является чётной функцией, то* $b_n=0$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$. *Найдём* $a_n (n\in\mathbb{N}_0)$:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx=\pi,\ \ a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos(nx)dx=\frac{2}{n\pi}x\sin(nx)|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1),$$

откуда $a_{2k} = 0$, *а* $a_{2k-1} = -\frac{4}{n^2\pi}$ *при всех натуральных* k. *Кроме того, функция* f *удовлетворяет всем условиям теоремы о сходимости ряда Фурье, так что*

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ x \in (-\pi, \pi).$$

Найдём с помощью полученного ряда Фурье сумму некоторых числовых рядов. При $x = 0$ *имеем равенства*

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Теперь мы можем найти ряд из суммы обратных квадратов.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}s \Leftrightarrow \frac{3}{4}s = \frac{\pi^2}{8} \Leftrightarrow s = \frac{\pi^2}{6}.$$

На рисунке ниже приведён график суммы ряда Фурье. На этом рисунке показано, что график суммы совпадает с графиком функции $y = |x|$ *только на отрезке* $[-\pi, \pi]$, *а вне этого отрезка сумма ряда является* 2π*-периодической.*

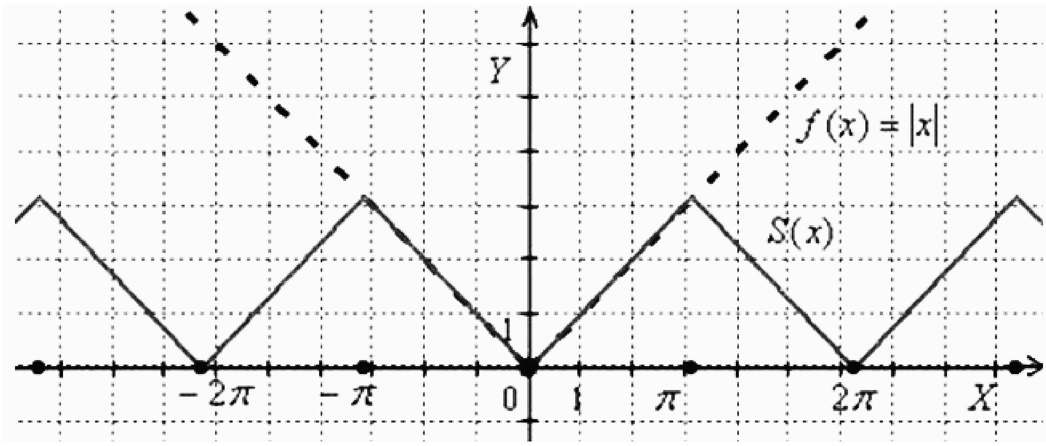

Рис. 1: Сумма ряда Фурье

Кроме того, приведём иллюстрацию того, как ведёт себя частичная сумма

$$s_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x\right):$$

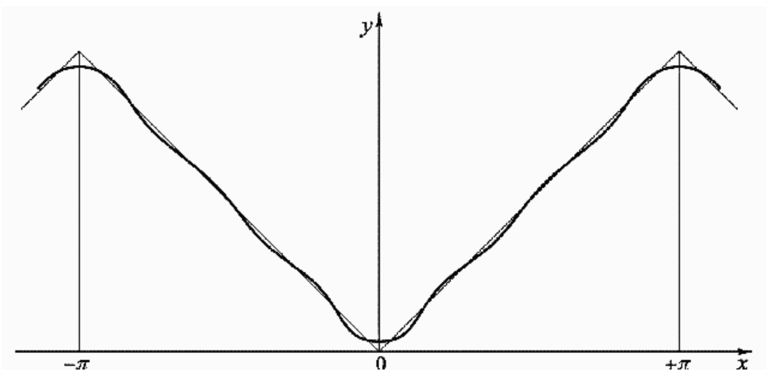

Рис. 2: Поведение частичной суммы

Схема доказательства теоремы о сходимости

Прежде всего докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 3. *Пусть функция является T-периодической и интегрируема на отрезке $[0,T]$. Тогда f интегрируема на любом отрезке длины T и для каждого $a \in \mathbb{R}$*

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{T+a} f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть дано $a \in \mathbb{R}$. Найдётся такое $n \in \mathbb{Z}$, что $a \in [nT,(n+1)T]$. Справедливо равенство

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx = \int_{nT}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{(n+1)T} f(x)dx.$$

Так как при всех вещественных x справедливы равенство $f(x \pm T) = f(x)$, то, делая в интеграле $\int\limits_{nT}^{a} f(x)dx$ замену $u = x + T$, получим

$$\int_{nT}^{a} f(x)dx = \int_{(n+1)T}^{a+T} f(u-T)du = \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)dx.$$

В последнем интеграле можно переменную u заменить на переменную x, так как числовое значение интеграла не изменится. Тогда

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx = \int_{nT}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{(n+1)T} f(x)dx = \int_{a}^{(n+1)T} f(x)dx + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{a+T} f(x)dx.$$

Остаётся только отметить, что

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(x)dx = \int_0^T f(v-nT)dv = \int_0^T f(v)dv = \int_0^T f(x)dx.$$

□

Чтобы исследовать поведение тригонометрического ряда Фурье в конкретной точке x_0, преобразуем его частичную сумму, так как для преобразованной суммы как раз можно будет сформулировать достаточные условия сходимости последовательности частичных сумм к значению $f(x_0)$.

Итак, обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье в точке x_0 следующим образом:

$$s_n(f,x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0)).$$

Имеем:

$$s_n(f,x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(kx)\cos(kx_0) + \sin(kx)\sin(kx_0))dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)dx$$

В сумме

$$s_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x - x_0) = \frac{1}{2} + \cos(x - x_0) + \cos 2(x - x_0) + ... + \cos n(x - x_0)$$

умножим обе части равенства на $\sin((x - x_0)/2)$. Тогда получим:

$$\sin((x - x_0)/2) \cdot s_n = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) + \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos(x - x_0) +$$
$$+ \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos 2(x - x_0) + ... + \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos n(x - x_0) =$$
$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{3(x - x_0)}{2}\right) - \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{5(x - x_0)}{2}\right) - \sin\left(\frac{3(x - x_0)}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7(x - x_0)}{2}\right) - \sin\left(\frac{5(x - x_0)}{2}\right)\right) + ... +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\sin\left((2n+1)\frac{x - x_0}{2}\right) - \sin\left((2n-1)\frac{x - x_0}{2}\right)\right) = \sin\left((2n+1)\frac{x - x_0}{2}\right),$$

откуда

$$s_n = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x - x_0}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}.$$

В итоге получим равенство

$$s_n(f, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x - x_0}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} dx.$$

Полученный интеграл называется **интегралом Дирихле**. Так как подынтегральная функция является 2π-периодической, то интеграл можно брать по любому отрезку длины 2π согласно доказанному предложению. Таким образом, справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x - x_0}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} dx = \int_{-\pi + x_0}^{\pi + x_0} f(x) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x - x_0}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} dx.$$

В интеграле, стоящем в правой части, сделаем замену $t = x - x_0$, тогда $t \in [-\pi, \pi]$, поэтому получим, что

$$\int_{-\pi + x_0}^{\pi + x_0} f(x) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x - x_0}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x_0) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Чётная функция $g(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ называется **ядром Дирихле.** Интеграл в правой части разобьём на сумму двух, пользуясь аддитивностью:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t + x_0) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \int_{-\pi}^{0} f(t + x_0) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt + \int_{0}^{\pi} f(t + x_0) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

В первом слагаемом правой части сделаем замену знака в переменной t, после чего получим окончательное выражение для частичной суммы ряда Фурье:

$$s_n(f, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt. \qquad (1)$$

Таким образом, вопрос сходимости частичных сумм ряда Фурье сведён к вопросу сходимости интеграла в правой части при $n \to \infty$.

Мы хотим, чтобы в точке x_0 наш интеграл стремился к $f(x_0)$. Прежде всего заметим, что если f является тождественной единицей на все прямой, то её ряд Фурье совпадает с ней, поэтому все частичные суммы для f равны 1, откуда, подставляя в (1) $f \equiv 1$ получаем равенство

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

Умножая обе части последнего равенства на $f(x_0)$ и вычитая результат из равенства (1), получим

$$s_n(f,x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0))\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt.$$

Мы хотим, чтобы левая часть этого равенства сходилась к нулю, а тогда и равная ей правая часть должна стремится к нулю при $n \to \infty$.

Введём обозначение $\varphi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)$. Сейчас мы покажем, что при условиях теоремы о сходимости интеграл справа действительно стремится к нулю. Для этого, не останавливаясь на доказательстве, сформулируем признак сходимости в точке x_0 ряда Фурье функции f к значению $f(x_0)$.

Теорема 4. ***(Признак Дини).*** *Пусть при некотором $h > 0$ сходится интеграл $\int\limits_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$. Тогда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{n}(a_n\cos(nx_0) + b_n\sin(nx_0)) = f(x_0)$.*

Чтобы доказать признак Дини, требуется установить, что из сходимости интеграла, фигурирующего в условии этого признака (который будем называть **интегралом Дини**), следует сходимость к нулю интеграла $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$. Желающие могут проделать это в качестве упражнения.

Напомним, что в точке разрыва первого рода x_0 строго регулярной функции f выполнено равенство $f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, то есть полусумме пределов слева и справа функции f в этой точке. Итак, если точка x_0 является точкой непрерывности функции f, то интеграл Дини можно записать в виде

$$\int\limits_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}dt,$$

а в случае разрыва первого рода в точке x_0 интеграл Дини можно записать в виде

$$\int\limits_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{t}dt.$$

Тогда, если существуют интегралы

$$\int\limits_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}dt \text{ и } \int\limits_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}dt \tag{2}$$

в случае точки непрерывности или интегралы

$$\int\limits_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}dt \text{ и } \int\limits_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}dt \tag{3}$$

в случае точки разрыва первого рода, то существует и интеграл Дини (в силу признака сравнения для интегралов и неравенства треугольника), поэтому сходится к $f(x_0)$ и ряд Фурье. Теперь сформулируем и докажем признак, в котором будут даны достаточные условия существования последних четырёх интегралов. Отсюда, как мы ниже увидим, будет вытекать основная теорема о сходимости.

Теорема 5. ***(Признак Липшица). 1)*** *Пусть $f \in C(x_0)$ и при достаточно малых $t > 0$ выполнены неравенства $|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Lt^\alpha$, где $L > 0$ и α $(0 < \alpha \leq 1)$ – некоторые константы. Тогда ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{n}(a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0))$ сходится к числу $f(x_0)$.*

2) *Пусть f имеет разрыв первого рода в точке x_0 и является регулярной в точке x_0, а также при достаточно малых $t > 0$ выполнены неравенства $|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)| \leq Lt^\alpha$, где $L > 0$ и α $(0 < \alpha \leq 1)$ – некоторые константы. Тогда*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}(a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)) = f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Доказательство. Рассуждения в случаях 1 и 2 аналогичны, так что проведём доказательство для случая 1. Если $\alpha = 1$, то величины $\left|\frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t}\right|$ ограничены, поэтому интегралы (2) существуют как собственные, откуда следует, что интеграл Дини существует, поэтому ряд сходится. Если же $0 < \alpha < 1$, то

$$\left|\frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t}\right| \leq \frac{L}{t^{1-\alpha}},$$

то есть интегралы (2) сходятся в силу признака сравнения, так как $L\int\limits_0^h \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ сходится, потому что $1 - \alpha < 1$. Рассуждения для интегралов (3) такие же.

Таким образом при выполнении указанных в условии оценок справедлив признак Дини, то есть ряд Фурье в точке x_0 сходится к значению $f(x_0)$. □

Вспоминая условия теоремы о сходимости, получаем, что так как по условию в каждой точке есть односторонние пределы подынтегральных выражений в (2) и (3), то эти выражения ограничены, а значит, выполнены все условия признака Липшица. Таким образом, выполнено заключение теоремы о сходимости, то есть ряд Фурье функции f из условия этой теоремы сходится в каждой точке вещественной оси к значению функции f в этой точке.

Разложения только по синусам или только по косинусам

Если функция $f \in W_{2\pi}$ нечётна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то все a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ равны нулю (см. предложение выше), а тогда ряд Фурье для неё будет иметь вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$. Аналогично, если функция $f \in W_{2\pi}$ чётна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то все b_n $(n \in \mathbb{N})$ равны нулю, поэтому ряд Фурье для неё будет иметь вид $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$.

Если в сходящемся к функции f ряде Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ рассмотреть отдельно его часть $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$, то суммой этой части будет функция $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, являющаяся чётной на $[-\pi, \pi]$, а часть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ будет сходиться к сумме $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, являющейся нечётной на $[-\pi, \pi]$. Это следует из того, что для функции f справедливо равенство $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ при всех $x \in [-\pi, \pi]$.

Пусть теперь функция f задана на отрезке $[0, \pi]$ и удовлетворяет на нём условиям, при которых справедлива теорема о сходимости ряда Фурье, а мы хотим разложить её в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого нужно доопределить её на $[-\pi, 0)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям теоремы, после чего уже можно раскладывать полученную функцию в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$, причём хотя бы на интервале $(0, \pi)$ ряд Фурье будет сходиться как раз к f.

Мы можем таким образом продолжить функцию f на промежуток $[-\pi, 0)$, чтобы получилась чётная или нечётная функция. Если мы хотим, чтобы получилась чётная функция, то определим продолжение на весь отрезок $[-\pi, \pi]$ так: $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$ Ниже приведена иллюстрация того, как устроено продолжение функции f до чётной на всём отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f^*, причём та часть, которая достраивается, при таком продолжении, изображена пунктиром.

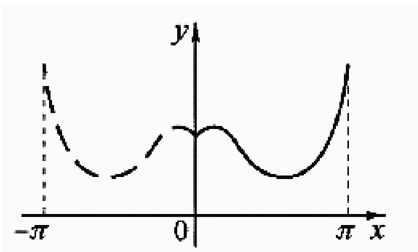

Рис. 3: Чётное продолжение

Если мы хотим, чтобы получилась нечётная функция, то определим продолжение на весь отрезок $[-\pi, \pi]$ так: $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$ Ниже приведена иллюстрация того, как устроено продолжение функции f до нечётной на всём отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f^*, причём та часть, которая достраивается, при таком продолжении, снова изображена пунктиром.

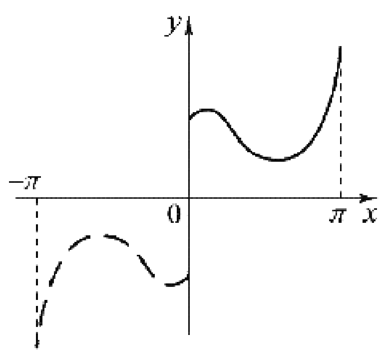

Рис. 4: Нечётное продолжение

В случае таких продолжений функция f может быть разложена на промежутке $[0,\pi]$ только по синусам или только по косинусам. Однако к самой функции f ряд может сходиться только внутри отрезка $[0,\pi]$. Так будет, если мы раскладываем функцию f по синусам, причём она не принимает нулевые значения на концах отрезка $[0,\pi]$. В этом случае суммой ряда Фурье в указанных точках будет полусумма пределов слева и справа продолжения с периодом 2π на всю прямую функции f^*. Для того, чтобы сказанное стало яснее, рассмотрим пример.

Пример 2. *Разложим $f(x) = \frac{\pi}{4}$ в ряд Фурье на промежутке $(0,\pi)$, используя только синусы. Это означает, что коэффициенты Фурье a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ должны быть равны нулю, что будет выполнено, если функция f нечётна на промежутке $(-\pi,\pi)$. Введём вспомогательную функцию*

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4},\ x \in (0,\pi), \\ 0,\ x = 0, \\ -\frac{\pi}{4},\ x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

и разложим её в ряд Фурье на промежутке (π,π). Так как f^* нечётная, то отличны от нуля могут быть только коэффициенты b_n $(n \in \mathbb{N})$. Найдём эти коэффициенты:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\pi}{4}\sin(nx)dx = -\frac{1}{2n}\cos(nx)|_0^\pi = \frac{1}{2n}(1-(-1)^n),$$

откуда $a_{2k} = 0$, а $a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$ при всех натуральных k. Таким образом,

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\ x \in (-\pi,\pi).$$

Тогда, рассматривая только значения $x \in (0,\pi)$, получим равенство

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\ x \in (0,\pi).$$

На рисунке ниже изображена сумма полученного ряда Фурье. В точках разрыва эта сумма равна полусумме пределов слева и справа. На промежутке $(-\pi,\pi)$ эта сумма рав-

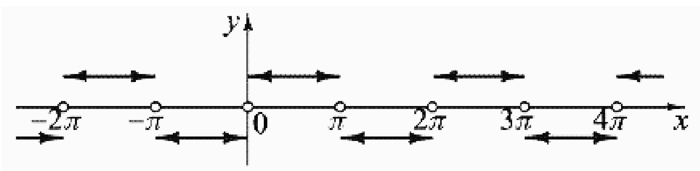

Рис. 5: Сумма ряда Фурье

на f^*, а в остальных точках она равняется значениям функции, полученной из f^* продолжением до 2π-периодической на всей прямой. На концах промежутка $(-\pi,\pi)$ сумма полученного ряда Фурье равна нулю, что как раз является полусуммой пределов слева и справа в этих точках функции, полученной из f^* продолжением до 2π-периодической на всей прямой.

Полезно изобразить несколько частичных сумм ряда, чтобы представить себе характер приближения частичных сумм к сумме ряда.

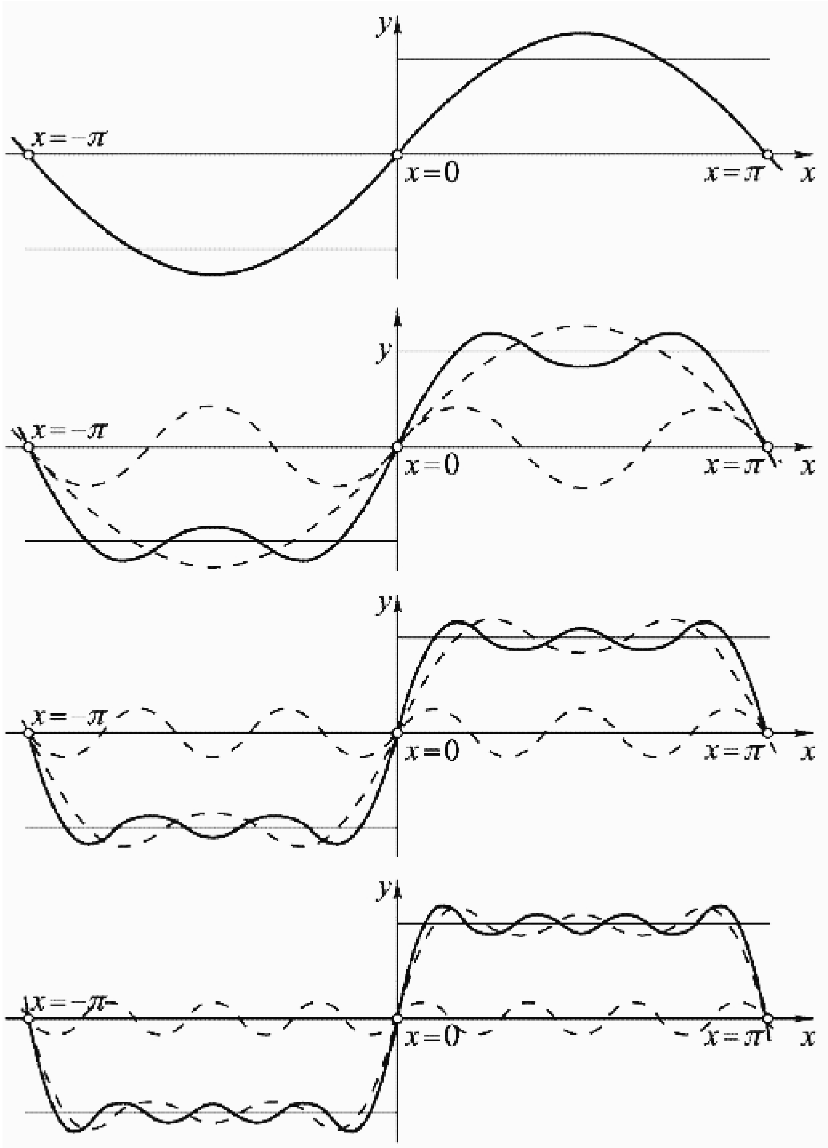

Рис. 6: Частичные суммы ряда Фурье

Здесь хорошо иллюстрируется как раз то, что в точка разрыва частичные суммы ряда Фурье приближаются к полусумме пределов слева и справа.

Обобщённые тригонометрические ряды Фурье

Вместо 2π-периодических функций мы можем рассматривать $2l$-периодические, где $l > 0$. Тогда всю теорию, описанную выше, можно перенести на этот случай, только нужно рассматривать другую ортогональную тригонометрическую систему. Для этого по аналогии с пространством W_π рассмотрим пространство строго регулярных $2l$-периодических функций, которое обозначим W_l. Если $g \in W_l$, то рассмотрим функцию $f(x) = g\left(\frac{lx}{\pi}\right)$. Так как

$$f(x+2\pi) = g\left(\frac{l(x+2\pi)}{\pi}\right) = g\left(\frac{lx}{\pi} + 2l\right) = g\left(\frac{lx}{\pi}\right) = f(x),$$

то $f \in W_\pi$. Таким образом, к f применимы все те факты, которые мы формулировали выше. В качестве f можно взять любую функцию из системы F, а тогда, проделывая обратную замену, получим, что система функций $F_1 = \{1,\ \cos\frac{\pi n x}{l},\ \sin\frac{\pi n x}{l}\}_{n\in\mathbb{N}}$ образует замкнутую ортогональную систему на отрезке $[-l, l]$. Ряды Фурье по этой системе функций называются **обобщенными тригонометрическими рядами Фурье.** При этом коэффициенты Фурье функции $g \in W_l$ вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)dx, \;\; a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \;\; b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Вся построенная выше теория переносится на эти ряды, причём рассуждения не меняются.

Таким образом достаточно многие функции оказывается возможным разложить в обобщенные тригонометрические ряды Фурье.