МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.
СТЕПЕННЫЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

(лекции для бакалавров)

Л.М.ЛУЖИНА

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу иностранных студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведен курс лекций для иностранных бакалавров по теории числовых и функциональных (степенных и тригонометрических) рядов, приведены примеры решения задач, связанных с этими темами.

Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Понятие числового ряда

Определение. Если каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставлено число $a_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана ***последовательность*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Иными словами, последовательность представляет собой отображение множества натуральных чисел во множество действительных чисел:

$1 \to f(1) = a_1 \in \mathbb{R}$

$2 \to f(2) = a_2 \in \mathbb{R}$

$3 \to f(3) = a_3 \in \mathbb{R}$

…

$n \to f(n) = a_n \in \mathbb{R}$

…

Примеры.

1. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = \frac{1}{n} = a_n$. Последовательность можно записать так:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = f(1), f(2), f(3), \dots f(n) \dots = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

2. Последовательность $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = (-1)^n = a_n$. Последовательность можно записать так:
   $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = f(1), f(2), f(3), \dots f(n) \dots =$
   $= (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, \dots (-1)^n, \dots = -1, 1, -1, \dots, (-1)^n \dots$

3. Последовательность $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = 2^n = a_n$. Последовательность можно записать так:
   $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = f(1), f(2), f(3), \dots f(n) \dots =$
   $= 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots = 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n \dots$

Пусть $\{a_n\}$ – произвольная числовая последовательность. Складывая один за другим ее члены, получаем последовательность сумм

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$

Каждая из этих сумм, начиная со второй, получается из предыдущей прибавлением одного слагаемого – члена заданной последовательности $\{a_n\}$, имеющего тот же номер: $S_n = S_{n-1} + a_n$ для всех $n > 1$. Поэтому процесс образования этих сумм можно представить в виде «бесконечно развертывающейся суммы» $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ Это не алгебраическая сумма (в алгебре определены лишь суммы конечного числа слагаемых), а запись процесса образования последовательности сумм $\{S_n\}$.

Формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

порождаемое числовой последовательностью $\{a_n\}$, называют ***числовым рядом***; числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – его членами: первым, вторым,..., a_n – n-ным или ***общим членом ряда***; $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ – ***частными (или частичными) суммами ряда.*** Для ряда (1) используется также обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Иногда нумерацию членов ряда начинают не с 1, а с 0. Тогда соответствующий ряд обозначается $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. При изучении ряда (1) часто приходится рассматривать формальные выражения вида $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$, которые в дальнейшем будут называться остатками ряда. Остатки ряда сами являются числовыми рядами. Они обозначаются следующим образом: $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Определим (пока тоже формально) сумму рядов и умножение ряда на число. Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ***Суммой*** этих рядов назовем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. ***Произведением*** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на число λ назовем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$.

1.2. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Определение 1. Если последовательность $\{S_n\}$ частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к некоторому числу S, то этот ряд называют сходящимся к сумме S и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ или $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

При этом допускается определенная вольность в обозначениях, состоящая в том, что одним и тем же символом $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обозначаются как сам ряд, так и его сумма.

Не сходящиеся ряды называют ***расходящимися.***

Замечание. Число S не следует называть «суммой всех членов ряда», так как существует класс рядов, сумма которых зависит от порядка нумерации «слагаемых». Заметим еще раз: S – это предел частных сумм ряда, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, если этот предел существует и конечен.

Сформулируем важное для дальнейшего утверждение.

Утверждение. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то для любого k сходится остаток ряда $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Обратно, если хотя бы для одного значения k сходится остаток ряда $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, то сходится и сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие. Утверждение означает, что либо все остатки ряда сходятся, либо все они расходятся.

Замечание. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму S, то любая его ***частная сумма S_n есть некоторое приближенное значение S***, а соответствующий остаток ряда представляет собой погрешность вычисления.

Докажем необходимое условие сходимости числового ряда.

Теорема 1.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство.

Пусть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S -$ его сумма. Так как при всех $n > 1$ выполняется равенство $a_n = S_n - S_{n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и утверждалось.

Обратное утверждение не является верным: из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пример. Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ монотонно стремятся к нулю, так как $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. С другой стороны, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ и $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) =$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - 1\right) = +\infty$, что и означает, что рассматриваемый ряд расходится.

Теорема 1.2. Пусть сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и их суммы равны S и T, соответственно. Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ и его сумма равна $S + T$. Кроме того, для любого числа c ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится и его сумма равна cS.

Доказательство.

Пусть S_n, T_n — частные суммы, соответственно, рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Последовательности $\{S_n\}$ и $\{T_n\}$ по условию имеют пределы, которые равны суммам рядов S и T. Применяя теорему о пределе суммы последовательностей, получаем, что последовательность $(S_n + T_n)$, представляющая собой последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, имеет предел, равный $S + T$. Аналогично, последовательность (cS_n) частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$имеет предел cS.

Теорема 1.3. Пусть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда ряд $\sum_{N=1}^{\infty} b_N$, члены которого образованы в результате последовательной группировки членов исходного ряда, то есть

$$b_N = a_{n_{N-1}+1} + \ldots + a_{n_N}, N = 1,2,\ldots,1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_{N-1} < n_N < \ldots$$

сходится и имеет ту же сумму.

Теорема 1.4. (критерий Коши сходимости ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполняется неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ или равносильное неравенство
$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Доказательство.

Вспомним критерий Коши существования предела последовательности частных сумм $\{S_n\}$: предел этой последовательности существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполняется неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

1.3. Бесконечная геометрическая прогрессия

Таким термином принято называть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a, q \neq 0$. Рассмотрим частные суммы $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$ этого ряда, рассмотрим также величину $S_n q = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n$и разность этих двух величин
$S_n - S_n q =$

$$= (a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n) = a - aq^n.$$

При $q \neq 1$ получаем: $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$. При $q = 1$, очевидно, $S_n = na$.

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, то есть ряд сходится к сумме $S = \frac{a}{1-q}$. Если $|q| \geq 1$, то этот ряд расходится, поскольку не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Глава 2. СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

2.1. Критерий сходимости положительного ряда

Определение. Положительным рядом называют любой числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, все члены которого удовлетворяют условию $a_n \geq 0$.

Замечание. Если неравенство $a_n \geq 0$ выполняется не для всех n, а только для n, начиная с некоторого номера n_0, то мы можем рассматривать не сам исходный ряд, а его остаток $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Согласно утверждению из гл.1 ряд и любой его остаток либо одновременно являются сходящимися, либо одновременно являются расходящимися. Поэтому предположение о том, что неравенство $a_n \geq 0$ выполняется для всех n, не ограничивает общности изложения.

Теорема 2.1. Положительный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n = 0,1,2,\dots$ ограничена сверху.

Доказательство.

Из условия следует:

$$0 \leq S_n = a_1 + \dots + a_n \leq a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_{n+1}.$$

Таким образом, $\{S_n\}$ – неубывающая последовательность. Если она ограничена сверху, то по теореме Вейерштрасса (напомним формулировку этой теоремы: всякая неубывающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, и число S, по определению, есть сумма рассматриваемого ряда. Обратно, если последовательность частных сумм имеет предел, то она ограничена, так как любая имеющая предел последовательность ограничена.

Замечание. В этой теореме условие положительности ряда является существенным. Например, последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ограничена, так как состоит из всего двух чисел: 0 и 1. Сам же этот ряд, как отмечено выше, расходится, поскольку не удовлетворяет необходимому признаку сходимости.

2.2. Сравнение положительных рядов

Теорема 2.2 (*первая теорема сравнения положительных рядов*). Пусть положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ при всех n обладают свойством $a_n \leq b_n$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$сходится, то сходится также и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (значит, если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$). В случае сходимости рядов выполняется неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство.

Пусть S_n, T_n – частные суммы, соответственно, рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Из условия получаем очевидное неравенство $S_n \leq T_n$. Так как по условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$сходится, то по теореме из гл.1 последовательность T_n ограничена сверху, то есть существует число T такое, что для всех n выполняется неравенство $T_n \leq T^*$. Но тогда для всех n выполняется и неравенство

$$S_n \leq T_n \leq T^*,$$

означающее, что последовательность S_n ограничена сверху. По той же теореме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$сходится.

Замечание. Напомним, что заключение теоремы о сходимости останется верным, если неравенства $a_n \leq b_n$ выполняется не для всех n, а только для n, начиная с некоторого номера n_0. Однако неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует заменить неравенством $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Теорема 2.3 (*вторая теорема сравнения положительных рядов*). Пусть положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ при всех n обладают свойством $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ и пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$. Тогда, либо оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство.

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ запишем в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{k}{2}$.

Для соответствующего n_0 получаем: $\forall n > n_0 \ -\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} - k < \frac{k}{2}$, $\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$, что равносильно неравенствам $n > n_0$, $\frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3k}{2} b_n$, поскольку $b_n > 0$.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то, по второй теореме гл.1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{2} b_n$ (мы положили $c = \frac{3k}{2}$ в этой теореме). Но тогда по первой теореме сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, поскольку при всех $n > n_0$ выполняются неравенства $0 < a_n < \frac{3k}{2} b_n$.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то по первой теореме сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2} b_n$, поскольку при всех $n > n_0$ выполняются неравенства $0 < \frac{k}{2} b_n < a_n$. По второй теореме гл.1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (мы положили $c = \frac{2}{k}$ в этой теореме).

Выше доказано, что если сходится один из рассматриваемых рядов, то сходится и другой, то есть не может оказаться так, что один ряд сходится, а другой расходится. Это означает также, что если расходится один из этих рядов, то и другой расходится.

2.3. Признаки сходимости Коши и Даламбера положительных рядов

Теоремы сравнения позволяют доказать два простых и удобных признака сходимости положительных рядов, часто используемых на упражнениях по математическому анализу.

Теорема 2.4 (*признак сходимости Коши*). Пусть $0 < q < 1$. Если существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$сходится, если же существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

Если существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то выполняются также неравенства $0 \leq a_n \leq q^n$. Так как геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$, то по первой теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$также сходится. Если же существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то $a_n \geq 1$. Поэтому равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ невозможно, необходимый признак сходимости не выполнен и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Часто признак Коши формулируют в ***предельной форме***:

Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится. Если $q > 1$, то ряд расходится. При $q = 1$ признак ответа не дает.

Пример. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$?

Применим признак Коши в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}\cdot(-n)}=e^{-1}<1.$$

Ряд сходится.

Теорема 2.5 (*признак сходимости Даламбера*). Если существует такой номер n_0, что при $n\geq n_0$ выполняются неравенства $0<a_{n+1}<qa_n$, где $0<q<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$сходится. Если существует такой номер n_0, что при $n\geq n_0$ выполняются неравенства $a_{n+1}\geq a_n>0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Доказательство.

В первом случае при $n\geq n_0$ выполняются неравенства $0<a_{n_0+1}<qa_{n_0}$, $0<a_{n_0+2}<qa_{n_0+1}$,…,$0<a_{n-1}<qa_{n-2}$, $0<a_n<qa_{n-1}$. Последовательно двигаясь справа налево, получаем следствие этих неравенств:

$$0<a_n<qa_{n-1}<q^2a_{n-2}<\ldots<q^{n-n_o-1}a_{n_0+1}<q^{n-n_0}a_{n_0}.$$

Значит, при $n\geq n_0$ имеем: $a_n<\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}q^n$.

Геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ сходится при $|q|<1$. Число $\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$ представляет собой постоянную, не зависящую от n величину. Поэтому сходится также ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}q^n$. Осталось применить первую теорему сравнения.

Если же существует такой номер n_0, что при $n\geq n_0$ выполняются неравенства $a_{n+1}\geq a_n>0$, то для любого $n\geq n_0+1$ имеем: $a_n\geq a_{n_0+1}>0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится по необходимому признаку сходимости.

В ***предельной форме*** признак Даламбера выглядит так:

Пусть существует такой номер n_0, что при $n\geq n_0$ выполняется неравенство $a_n>0$ и пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$.

Тогда, если $q<1$, то ряд сходится. Если $q>1$, то ряд расходится. При $q=1$ признак ответа не дает.

Пример. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$? Применим признак Даламбера в предельной форме: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$. Ряд сходится.

Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ МАКЛОРЕНА – КОШИ

Теория рядов во многом подобна теории несобственных интегралов. Действительно, несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ определяется как предел $\lim\limits_{B\to\infty} F(B) = \lim\limits_{B\to\infty} \int_a^B f(x)dx$. Ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$ также определяется с помощью предельного перехода как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k$.

Как доказано выше, положительный ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, ограничена сверху, то есть существует постоянная С такая, что для любого $n = 1,2,3, \ldots$ выполняется неравенство $S_n \le C$. Напомним, что если $f(x) \ge 0$, то несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует некоторая постоянная D, такая, что для любого $B \ge a$ выполняется неравенство $\int_a^B f(x)dx \le D$.

Схожесть понятий ряда и несобственного интеграла особенно отчетливо видна в следующей теореме.

Теорема 3.1 (*интегральный признак сходимости Маклорена – Коши*). Пусть $f(x)$, определенная при $x \ge 1$, неотрицательная невозрастающая функция. Тогда ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty f(k)$ и несобственный интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство.

Так как функция $f(x)$, невозрастающая, она является интегрируемой на отрезке $[1, B]$ для любого $B \ge 1$ (вспомним теорему: монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке). Кроме того, для любого натурального числа n на отрезке $[n, n+1]$ выполняются неравенства

$$f(n+1) \le f(x) \le f(n).$$

Как отмечалось выше, эти неравенства можно почленно интегрировать на отрезке $[n, n+1]$ (вспомним свойство интеграла: если $a < b$ и интегрируемые функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x \le g(x)$, то и $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx)$ и поэтому

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} f(n)dx.$$

Поскольку $f(n+1)$, $f(n)$ – не зависящие от x величины, то есть постоянные, то имеют место равенства

$\int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1)$,

$\int_n^{n+1} f(n)dx = f(n)$.

Следовательно, $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$.

Пусть, далее, $N \ge 2$, N – натуральное число. Просуммируем эти неравенства по n, начиная от $n = 1$ до $n = N - 1$ и получим неравенства

$$f(2) + f(3) + \dots + f(N) \le \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots \int_{N-1}^N f(x)dx \le$$
$$\le f(1) + f(2) + \dots + f(N-1).$$

Сумма интегралов по свойству аддитивности интеграла равна $\int_1^N f(x)dx$. В левой и правой частях этих неравенств стоят, соответственно, $S_N - f(1)$ и S_{N-1}.

Таким образом, для любого натурального числа $N \ge 2$ получаем

$$S_N - f(1) \le \int_1^N f(x)dx \le S_{N-1},$$

откуда следует, что $S_N \le f(1) + \int_1^N f(x)dx$.

Предположим, что сходится интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$. Так как функция $f(x) \ge 0$ по условию, то критерий существования несобственного интеграла, сформулированный выше, показывает, что существует некоторая постоянная D, такая, что для любого $B \ge 1$ выполняется неравенство $\int_1^B f(x)dx \le D$. Значит, для любого N выполняется неравенство $S_N \le C = f(1) + D$ и критерий сходимости ряда $\sum_{k=1}^\infty a_k$ выполнен. Отметим также, что, переходя к пределу при $N \to \infty$ в неравенстве $S_N \le f(1) + \int_1^N f(x)dx$, мы получаем, что сумма ряда не превосходит величины $f(1) + \int_1^\infty f(x)dx$.

Обратно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$, то существует некоторая постоянная C, такая, что для любого N выполняется неравенство $S_N \le C$.

Для произвольного $B \ge 1$ выберем натуральное число N так, чтобы выполнялись неравенства $N \le B \le N + 1$. Так как $f(x) \ge 0$, справедливы неравенства $\int_1^N f(x)dx \le \int_1^B f(x)dx \le \int_1^{N+1} f(x)dx$. По доказанному выше, $\int_1^N f(x)dx \le S_{N-1}$ для любого натурального N, поэтому оно остается справедливым, если заменить в нем число N числом $N + 1$, то есть $\int_1^{N+1} f(x)dx \le S_N$. Таким образом, для произвольного $B \ge 1$ имеем

$$\int_1^B f(x)dx \le \int_1^{N+1} f(x)dx \le S_N \le C,$$

откуда следует сходимость несобственного интеграла $\int_1^\infty f(x)dx$.

Доказанная теорема имеет простую геометрическую интерпретацию.

График функции $y = f(x)$ заключен между двумя графиками ступенчатых функций. Площадь каждой ступеньки «верхней» функции на отрезке $[n, n+1]$ равна $f(n)$, а площадь каждой ступеньки «нижней» функции равна $f(n+1)$. Поэтому неравенства $S_N - f(1) \le \int_1^N f(x)dx \le S_{N-1}$ имеют простой геометрический смысл неравенств между соответствующими площадями.

Доказанная теорема имеет ряд важных следствий. Приведем одно из них.

Следствие. Ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Доказательство.

В этом случае $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$. Про него известно, что он сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$. Осталовсь применить теорему.

Замечание. Величина $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ зависит от p и при $p > 1$ может рассматриваться, как функция от p. Это – одна наиболее важных в математике функций, носящая название «дзета-функция Римана» и обозначаемая $\zeta(p)$.

Глава 4. РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗНАКОВ

4.1. **Абсолютная сходимость**

Перейдём к рассмотрению общего случая, когда члены ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ имеют произвольные знаки и введём два новых ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$ и $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$. Члены этих рядов определяются равенствами

$$a_n^+ = max\{a_n, 0\}, a_n^- = min\{a_n, 0\}.$$

Имеют место равенства

$$a_n = a_n^+ + a_n^-, |a_n| = a_n^+ - a_n^-, \quad (1)$$

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}. \quad (2)$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$.

Таким образом, сходящиеся положительные ряды, рассмотренные в предыдущем параграфе, сходятся абсолютно.

Утверждение. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство.

Применим к сходящемуся ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ критерий Коши сходимости ряда. Получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполняется неравенство $\left||a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}|\right| < \varepsilon$. По свойству модуля $\left|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}\right| \leq$ $|a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}|\Big| < \varepsilon$, поэтому для исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также выполняется критерий Коши, и он сходится.

Теорема 4.1. Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна одновременной сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но не абсолютно, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.

Доказательство.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то по утверждению сходится также сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда из равенств

$$a_n^+ = \frac{a_n+|a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n-|a_n|}{2}$$

и теоремы 2 пункта 1.2 следует, что сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Обратно, пусть сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Тогда из равенств $a_n = a_n^+ + a_n^-, |a_n| = a_n^+ - a_n^-$ и теоремы 2 пункта 1.2 следует, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то из равенств $a_n^+ = \frac{a_n+|a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n-|a_n|}{2}$ следует, что оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся, как полусуммы сходящегося и расходящегося ряда. Теорема доказана.

Значение этой теоремы состоит в том, что она сводит вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого имеют произвольные знаки к сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, члены которых имеют постоянные знаки.

Важным свойством абсолютно сходящегося ряда является его безусловная сходимость. Дадим определение этого понятия. Если переставить члены сходного ряда, то есть поменять их нумерацию, не добавляя новых членов и не отбрасывая старых, то получится некоторый новый ряд. На первый взгляд, по аналогии с переместительным законом сложения, полученный в результате перестановки ряд должен сходиться и иметь ту же сумму, что и исходный ряд. Но вскоре мы увидим, что это не всегда так! И переместительный закон, доказанный для конечных сумм, не обязательно выполняется для бесконечных рядов.

Свойство сходящегося ряда оставаться сходящимся и не менять суммы при любой перестановке его членов называется ***безусловной сходимостью*** ряда.

Теорема 4.2 (*Теорема Дирихле о безусловной сходимости*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он сходится безусловно.

Доказательство.

Сначала рассмотрим положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и произведём произвольную перестановку его членов. В результате получится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, для любого члена b_n которого существует такой номер k_n, что $b_n = a_{k_n}$. Частная сумма $S_N^* = b_1 + \ldots + b_N$ равна $a_{k_1} + \ldots + a_{k_N}$. Среди конечного множества чисел $k_1, \ldots, k_N$ выберем наибольшее и обозначим его M. Так как члены ряда неотрицательны по условию, выполняются неравенства

$$S_N^* = b_1 + \ldots + b_N = a_{k_1} + \ldots + a_{k_N} \leq a_1 + \ldots + a_M = S_M.$$

Таким образом, для любого N существует такое M, что $S_N^* \leq S$. Так как положительный ряд сходится, его частные суммы ограничены сверху суммой ряда S. Следовательно, частные суммы S_N^* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены сверху этим же числом S. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Кроме того, так как для любого N выполнено неравенство $S_N^* \leq S$, сумма S^* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$удовлетворяет неравенству $S^* \leq S$, то есть при перестановке членов ряда его сумма не возрастает. Для доказательства обратного неравенства $S^* \geq S$ просто рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ как исходный, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – как полученный из него обратной перестановкой. Таким образом, мы получили неравенства $S^* \leq S$ и $S^* \geq S$, из которых следует, что $S^* = S$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда знаки членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ произвольны. Рассмотрим тогда соответствующие ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. По определению, числа $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \min\{a_n, 0\}$имеют постоянные знаки, из теоремы 1 следует, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$сходятся. Согласно равенствам (1), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, поэтому перестановка членов ряда приводит к перестановкам членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Но к этим рядам можно применить доказанную первую часть теоремы, согласно которой перестановки не меняют их сумм. Значит, не изменится и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана.

Глава 5. УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

5.1 **Теорема Римана**

В предыдущем параграфе установлено, что, если ряд сходится абсолютно, то он сходится и безусловно. Однако если ряд сходится не абсолютно, то перестановка членов ряда может изменить его сумму и даже нарушить сходимость ряда. Эти удивительные факты нашли свое отражение в следующей теореме.

Теорема Римана. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится не абсолютно, то для любого заданного числа A (так же, как и для $\pm\infty$), существует такая перестановка членов этого ряда, в результате которой получится ряд, сумма которого равна A.

5.2. **Теорема Лейбница**

Важным примером рядов, сходимость которых может быть неабсолютной, являются знакочередующиеся ряды, то есть ряды вида:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n,\ c_n \geq 0.$

Теорема Лейбница. Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n,\ c_n \geq 0$ удовлетворяют условиям

1) $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \ldots \geq c_n \geq \ldots$
(иными словами, $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$ для всех n);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0.$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n,\ c_n \geq 0$ сходится и его сумма S удовлетворяет неравенствам $0 \leq S \leq c_1$.

Доказательство.

Рассмотрим частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ с четными номерами. Они удовлетворяют неравенствам:

$$S_{2n} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2n-3} - c_{2n-2} + c_{2n-1} - c_{2n} =$$
$$= S_{2n-2} + c_{2n-1} - c_{2n} \geq S_{2n-2}.$$

Кроме того, также выполняется, что
$s_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n} \le c_1$.
Последовательность S_{2n} является возрастающей и ограниченной сверху, поэтому она имеет предел по теореме Вейерштрасса. Обозначим его S. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N_1(\varepsilon)$, что для всех номеров $2n$ таких, что $2n > N_1(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$|S_{2n} - S| < \varepsilon$.

Кроме того, по доказанному, для любого n выполняются неравенства
$0 \le S_{2n} \le c_1$. По теореме о предельном переходе в неравенствах имеем
$0 \le S \le c_1$.

Частная сумма с нечетным номером имеет вид: $S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1}$. Поэтому получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + c_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N_2(\varepsilon)$, что для всех номеров $2n + 1$ таких, что $2n + 1 > N_2(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$|S_{2n+1} - S| < \varepsilon$.

Положим, для любого $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$. Тогда, если $N > N(\varepsilon)$, то, ввиду полученных выше неравенств, как в случае $N = 2n$, так и в случае $N = 2n+1$ получаем: $|S_N - S| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{N\to\infty} S_N = S$.
Теорема доказана.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, так как $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Позже будет доказано, что сумма этого ряда равна $\ln 2$.

Замечание: Остаток R_{N-1} ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$, $c_n \ge 0$ имеет вид
$\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n, c_n \ge 0$. Если N – четное число, то выполняются неравенства $-c_N \le R_{N-1} \le 0$, а если N – нечетное число, то выполняются неравенства $c_N \ge R_{N-1} \ge 0$.

Это замечание будет использовано при оценке точности приближенных вычислений, использующих ряды.

Сформулируем две полезные теоремы.

Теорема Дирихле. Пусть

1) частные суммы S_n ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ образуют ограниченную последовательность;

2) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$;

3) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Замечание. Теорема Лейбница является следствием теоремы Дирихле, в котором $a_n = (-1)^{n-1}, b_n = c_n$. Суммы S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ принимают всего два значения: 0 и 1.

Теорема Абеля. Пусть

1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится;

2) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$;

3) (b_n) − ограниченная последовательность.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Глава 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

6.1. Поточечная сходимость функциональной последовательности и ряда

Пусть $\{(f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ − последовательность функций, определенных на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и пусть эта последовательность имеет предел при любом $x \in X$. В этом случае можно определить предельную функцию

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in X$$

и говорить, что последовательность $\{(f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ на множестве X (иногда добавляя слово ***поточечно***).

Аналогично, если все члены ряда $\{(a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – определены на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и этот ряд сходится при любом $x \in X$, то полагаем $f(x)$ равной пределу частных сумм этого ряда: $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),\ x \in X$. Обозначаем также $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$; эта функция называется суммой ряда.

Одна из главных проблем в связи с этими определениями такова: сохраняются ли важнейшие свойства функций $f_n(x), n = 1,2,3,\ldots$, такие, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость у предельной функции $f(x)$? Та же проблема важна и для суммы ряда.

Оказывается, эти свойства не всегда сохраняются. Рассмотрим примеры.

Пусть $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$. Найдём предельную функцию $f(x)$. Если $x \in [0,1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, а если $x = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$, таким образом предельная функция оказалась разрывной.

Другой пример: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}, n = 1,2,3,\ldots$. Очевидно, что для любого x имеем: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0$. Следовательно, для любого x производная $f'(x) = 0$. Однако $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ и $f_n'(0) = \sqrt{n} \to \infty$, $n \to \infty$. Поэтому последовательность производных $\{(f_n{}'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не может иметь пределом $f'(x)$.

Наконец, пусть $f_n(x) = nx(1-x^2)^n, x \in [0,1], n = 1,2,3,\ldots$. Для любого $x \in (0,1]$ величина $q = 1 - x^2$ удовлетворяет неравенствам $0 \le q < 1$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nxq^n = 0$. Кроме того, $f_n(0) = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, x \in [0,1]$. Значит, $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$.

Но $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = -\frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = \frac{n}{2n+2}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} \ne 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

6.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Примеры, приведенные в предыдущем пункте, показали, что при описанном в этом пункте поточечном предельном переходе могут не сохраниться основные свойства функций, входящих в последовательность. Определим более сильное понятие – равномерную сходимость.

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $\{(f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на множестве $X \subset \mathbb{R}$, равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Для равномерной сходимости часто используется обозначения $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Укажем на отличие определения равномерной сходимости от определения поточечной сходимости. Определение поточечной сходимости таково: для всех $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon, x)$, что при $n > N(\varepsilon, x)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Определение равномерной сходимости содержит значительно более сильное требование, состоящее в том, что существует число $N(\varepsilon)$, пригодное в качестве $N(\varepsilon, x)$ для всех $x \in X$.

Ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если последовательность его частных сумм равномерно сходится на этом множестве.

Следующая теорема представляет собой критерий Коши равномерной сходимости.

Теорема 6.1. Последовательность функций $\{(f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на множестве $X \subset \mathbb{R}$, равномерно сходится на этом множестве тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $x \in X$ при $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Переформулируем этот критерий на случай рядов.

Теорема 6.2. Ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве $X \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $x \in X$ при $n > N(\varepsilon), p > 0, p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство: $\left|a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$.

Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частных сумм ряда.

Следствие (*необходимый признак равномерной сходимости ряда).* Если ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве $X \subset \mathbb{R}$, то последовательность $a_n(x)$ равномерно стремится к 0 на множестве X.

Положим в предыдущей теореме $p = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$, для всех $x \in X$выполняется неравенство: $|a_{n+1}(x)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{(a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно стремится к 0 на множестве X.

Непосредственно из определения равномерной сходимости вытекает простой, но часто полезный критерий.

Теорема 6.4 ***(Вейерштрасса о мажорантной сходимости).***

Пусть последовательность функций $\{(a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и пусть для всех n и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|a_n(x)| \le c_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Кроме того, этот ряд сходится абсолютно для всех $x \in X$.

Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ следует из первой теоремы сравнения положительных рядов.

Далее, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ означает выполнение критерия Коши. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ и любом $p > 0, p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\left|c_{n+1}+\ldots+c_{n+p}\right| < \varepsilon$. Из условия теоремы сразу следует, что все числа $c_n \ge 0$ и предыдущее неравенство можно переписать в виде $c_{n+1}+\ldots+c_{n+p} < \varepsilon$. Снова используем условие теоремы и получим, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\left|a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)\right| \le c_{n+1}+\ldots+c_{n+p} < \varepsilon$. Это означает, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ выполнен критерий Коши равномерной сходимости.

Приведем пример использования этой теоремы. Рассмотрим геометрическую прогрессию $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Докажем, что этот ряд равномерно сходится на любом множестве $[-q, q], 0 < q < 1$. Действительно, на этом множестве выполняются неравенства $|x^n| \le q^n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. По теореме Вейерштрасса он сходится равномерно. Напомним, что выше мы установили, что на всем интервале $(-1,1)$ геометрическая прогрессия сходится неравномерно.

Замечание. Абсолютная сходимость и равномерная сходимость – независимые понятия. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$ равномерно сходится на множестве $x \ge 0$, так как, по теореме Лейбница, абсолютная величина его остатка не превосходит $\frac{1}{x+n+1} \le \frac{1}{n+1}$. Значит, остаток ряда равномерно стремится к 0, что и означает равномерную сходимость ряда. Однако ряд из модулей

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$ расходится. Действительно, сравним этот ряд с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(x+n)}\cdot\frac{n}{1}\right)=1$, то можно применить вторую теорему сравнения.

Наконец, уже многократно упоминавшаяся геометрическая прогрессия на интервале $(-1,1)$ сходится абсолютно, но неравномерно.

Глава 7. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Теорема 7.1. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на множестве $X\subset\mathbb{R}$, равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$. Пусть $a-$ предельная точка множества X и пусть $\lim\limits_{x\to a}f_n(x)=A_n$. Тогда последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причём $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$, иными словами, $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to a}f_n(x)\right)$.

По критерию Коши для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon)$, $m>N(\varepsilon)$ для всех $x\in X$ выполняется неравенство: $|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $x\to a$ и получим неравенство $|A_n-A_m|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, означающее, что для последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняется критерий Коши. Поэтому существует предел этой последовательности, который будет обозначен A.

Теперь, $|f(x)-A|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A|$.

Сначала выберем n так, чтобы для всех $x\in X$ выполнялось неравенство: $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ и чтобы $|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}$. Такой выбор возможен, так как последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$ и так как A – предел последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Затем подберём такую окрестность $U(a)$ точки a, что для всех $x\in U(a)$ выполняется неравенство $|f_n(x)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Следовательно, для всех $x\in U(a)$ выполняется неравенство
$|f(x)-A|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$,

означающее, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Следствие 1. Если последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, непрерывных на множестве $X \subset \mathbb{R}$, равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$, то $f(x)$ непрерывна на множестве X.

Следствие 2. Пусть функции $a_n(x)$ непрерывны на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на этом множестве. Тогда сумма $f(x)$ этого ряда непрерывна на множестве X.

Достаточно применить предыдущее следствие к последовательности частных сумм ряда.

7.1. Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема 7.2. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, равномерно сходится на этом отрезке к предельной функции $f(x)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интегралы в обеих частях доказываемого равенства существуют. Рассмотрим функцию $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b r_n(x)dx = 0$. Ввиду равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство: $|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Но тогда при $n > N(\varepsilon)$ имеем:

$$\left|\int_a^b r_n(x)dx\right| \le \int_a^b |r_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b r_n(x)dx = 0$ доказано.

Следствие. Пусть функции $a_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx$$

Достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частных сумм ряда.

Замечание. Доказанные теорема и следствие останутся верными и при более слабых условиях интегрируемости всех функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, (соответственно, $a_n(x)$) на отрезке $[a,b]$.

7.2. Равномерная сходимость и дифференцирование

Теорема. 7.3. Пусть все функции $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Пусть последовательность $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $[a, b]$ и пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $f(x)$ и в любой точке $x \in [a, b]$ выполняется равенство $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Следствие. Пусть функции $a_n'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Пусть хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$сходится равномерно на этом отрезке и для любой точки x из отрезка $[a, b]$

$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

Глава 8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

8.1. **Радиус сходимости степенного ряда**

Степенным рядом называется ряд вида

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$,

где a_n – числа, называемые коэффициентами ряда. Так как замена переменной $z = x - x_0$ сразу приводит к ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

имеющему несколько более простой вид, дальнейшие исследования будем проводить именно для рядов такого вида, точнее, для рядов

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Прежде всего выясним вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Очевидно, что если $x = 0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, какими бы ни были его коэффициенты.

Теорема 8.1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, хотя бы неабсолютно, в точке $x = a, a \neq 0$, то он сходится и в любой точке x, удовлетворяющей неравенству $|x| < |a|$, причём сходится в этой точке абсолютно.

Представим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в виде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n \left(\frac{x}{a}\right)^n$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n$сходится, его общий член $a_n a^n$ стремится к нулю, поэтому, начиная с некоторого n_0, выполняются неравенства $|a_n a^n| \leq 1$. Поскольку

$\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, сравнение с геометрической прогрессией $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{a}\right|^n$ показывает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$сходится.

Геометрически эта теорема означает, что областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является промежуток числовой оси, середина которого совпадает с точкой $x = 0$.

Возможны следующие 2 случая. В первом из них множество абсолютных величин $|a|$ точек $x = a$, в которых сходится рассматриваемый ряд, ограничено сверху. Тогда существует точная верхняя грань этого множества. Эта величина называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда и обозначается R. Из определения следует, что если $|x| < R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится, а если $|x| > R$, то этот ряд расходится.

Во втором случае множество абсолютных величин $|a|$ точек $x = a$, в которых сходится рассматриваемый ряд, не ограничено сверху. Тогда это означает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае полагаем $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости можно воспользоваться одной из следующих формул.

Теорема 8.2.

1. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, то $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, считаем $R = \infty$, а если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, то $R = 0$).
2. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, то $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ (в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, считаем $R = \infty$, а если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$).

Доказательство.

Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ признак сходимости Коши. По условию, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n x^n|}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|\cdot|x|$. Признак Коши даёт следующие утверждения: если величина

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n x^n|}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|\cdot|x|$$

меньше 1, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$сходится, если больше 1, то этот ряд расходится. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|\cdot|x|=0\cdot|x|=0<1$ для любого x, поэтому ряд всюду сходится и $R=\infty$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>0$, то при $|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|\cdot|x|<1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ сходится, а при $|x|>\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|\cdot|x|>1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ расходится. Как отмечалось выше, это означает, что $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Вторую формулу получим, если применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ признак сходимости Даламбера. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$ существует по условию. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=0\cdot|x|=0<1$ для любого x, поэтому ряд всюду сходится и $R=\infty$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>0$, то при $|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|<1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ сходится, а при $|x|>\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|>1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ расходится. Как отмечалось выше, это означает, что $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

1) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится на всей числовой прямой. Для него $R=\infty$. Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ равен 1, так как для любого p выполняется, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$.
2) Наконец, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$ сходится только при $x=0$, то есть $R=0$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Интервал $(-R,R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

Как доказано выше, во всех точках этого интервала степенной ряд абсолютно сходится. Что касается концевых точек $x=\pm R$, то ряд может в них как сходиться, так и расходиться. Приведём соответствующие примеры, в каждом из которых $R = 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, сумма геометрической прогрессии, расходится в точках $x = \pm 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ расходится при $x = 1$, так как совпадает в этой точке с гармоническим рядом. Однако при $x = -1$ этот ряд сходится по теореме Лейбница (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – знакочередующийся с монотонно стремящимися к нулю модулями его членов).

Наконец, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ абсолютно сходится в точках $x = \pm 1$ по теореме сравнения (сравниваем с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится).

8.2. **Непрерывность степенного ряда**

Теорема 8.3. Степенной ряд представляет собой непрерывную функцию на всём интервале сходимости.

Лемма. Пусть $0 < q < R$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$сходится на $[-q, q]$ абсолютно и равномерно.

Доказательство.

При $x = q$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$сходится абсолютно, то есть сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| q^n$. Так как для любого $x \in [-q, q]$ имеем: $|a_n x^n| \leq |a_n| q^n$, из теоремы Вейерштрасса следуют как абсолютная, так и равномерная сходимость ряда на $[-q, q]$ (впрочем, абсолютная сходимость на всём интервале $(-R, R)$ была установлена в п.8.1).

Замечание. Доказанная лемма не утверждает равномерной сходимости степенного ряда на его интервале сходимости. Более того, в ряде случаев равномерной сходимости нет. Примером служит геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, про которую в п.4.2 было доказано, что она не сходится на $(-1,1)$ равномерно.

Продолжим доказательство теоремы. Выберем произвольную точку $x \in (-R, R)$ и докажем, что степенной ряд непрерывен в этой точке. Для этого выберем число q так, чтобы выполнялись неравенства $|x| < q < R$. По предыдущей лемме, степенной ряд равномерно сходится на отрезке $[-q, q]$. Члены степенного ряда – непрерывные функции. По следствию 2 теоремы 1 п.4.3 ряд представляет собой функцию, непрерывную на этом отрезке. Следовательно, степенной ряд является непрерывной функцией в произвольной точке $x \in (-R, R)$.

Следствие. Если два степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ имеют одну и ту же сумму $f(x)$, то для всех n справедливы равенства $a_n = b_n$.

В указанной окрестности выполняется равенство

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots$$

Подставляя в него $x = 0$, получаем $a_0 = b_0$ и, следовательно,

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots.$$

Разделим обе части этого равенства на x, считая, что $x \neq 0$. В результате получим равенство

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1} + \ldots,$$

верное при $x \neq 0$. Просто подставить в это равенство $x = 0$ нельзя. Перейдём в нём к пределу при $x \to 0$. Из непрерывности каждого из степенных рядов, стоящих в правой и левой части, следует равенство $a_1 = b_1$. Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что для всех n справедливы равенства $a_n = b_n$.

Теорема 8.4 (*теорема Абеля*).

Если степенной ряд сходится в точке $x = R$, то его сумма непрерывна слева при этом значении x, то есть

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Если степенной ряд сходится в точке $x = -R$, то его сумма непрерывна справа при этом значении x, то есть

$$\lim_{x \to -R+0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

Лемма. Если степенной ряд сходится в точке $x = R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0, R]$.

Представим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n, 0 \leq x \leq R$$

и применим признак Абеля.

8.3. Дифференцируемость и интегрируемость степенного ряда

Теорема 8.5. Степенной ряд в промежутке от 0 до x, где $|x| < R$, можно интегрировать почленно, то есть

$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Значение x может совпадать и с точкой $x = \pm R$, если ряд сходится в этой точке.

По лемме из п.5.2 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$сходится на $[-|x|, |x|]$ равномерно. По следствию теоремы 1 п.4.4 получаем требуемое равенство.

Теорема 8.6. Степенной ряд представляет собой дифференцируемую функцию на всём интервале сходимости, кроме того, для любой точки x из этого интервала

$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Следствие. Обозначим $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда для любого натурального k существует производная функции порядка k и справедливо равенство

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$$

Замечание. Из теорем 8.1 и 8.2 вытекает, что радиусы сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$не меньше, чем R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Однако эти радиусы не могут быть и больше, чем R. Докажем это, например, для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Предположим, что радиус сходимости этого ряда равен $R^*, R^* > R$. Продифференцируем этот ряд почленно и получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. По доказанному выше, радиус сходимости R полученного ряда должен удовлетворять неравенству $R \geq R^*$. Это неравенство противоречит сделанному предположению.

Итак, радиус сходимости степенного ряда не меняется при его дифференцировании или интегрировании. Однако сходимость в концевых точках $x = \pm R$ у продифференцированного ряда может пропасть.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ сходится на $[-1,1]$. Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ сходится только на полуинтервале $[-1,1)$. В самом деле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится по теореме Лейбница, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Этот же пример показывает, что у проинтегрированного ряда может появиться сходимость в концевой точке.

Глава 9. РЯД ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

9.1 Ряд Тейлора

Теорема 9.1. Если степенной ряд $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ имеет ненулевой радиус сходимости R, вычисляемый формулой $\mathrm{R}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ или $\mathrm{R}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$, и в интервале $(-R,R)$ ряд сходится к сумме $f(x)$, то его коэффициенты равны $c_0=f_0(0)$, $c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство.

Так как

$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$; $x\in(-R,R)$, то $f(0)=c_0$.

Согласно теореме 8.6,

$f'(x)=c_1+2c_2x+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots$, $x\in(-R,R)$, то $f'(0)=c_1$,

или $c_1=\frac{f'(0)}{1!}$. Последовательное применение следствия теоремы 8.6 даёт

$f^{(k)}(x)=k(k-1)\ldots(k-k+1)c_k+(k+1)k\ldots(k+1-k+1)c_{k+1}x+\ldots$

для любого $x\in(-R,R)$ и любого $k\in\mathbb{N}$, так что $f^{(k)}(0)=k!\,c_k$,

или $c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$.

Теорема 9 .2. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ имеет ненулевой радиус сходимости *R*, вычисляемый формулой $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ или $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$, то в интервале его сходимости $(-R+x_0,R+x_0)$ его сумма $f(x)$, представима в виде

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$

$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,\ x\in(-R+x_0,R+x_0).$ (2)

Доказательство.

Положив $t=x-x_0$, переведём ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ в ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n=g(t)$, $t\in(-R,R)$ и $g(x-x_0)=f(x)$. Согласно теореме 9.1, $c_0=g(0)=f(x_0)$ и $c_n=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n\in N$, поэтому будет справедлива формула (2).

Ряд, стоящий в правой части (2), называется ***рядом Тейлора функции*** $f(x)$. Итак, любой степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Рассмотрим обратную задачу: всегда ли функция f, порождающая ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, является его суммой. Оказывается, нет.

Даже если ряд Тейлора функции f сходится, он может иметь другую сумму. Рассмотрим функцию $f_0(x)$,

$$f_0(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}, & \text{если } x\neq x_0,\\ 0, & \text{если } x=x_0\end{cases}$$

и положим $t=x-x_0$. Функция $g(t)$,

$$g(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t^2}}, & \text{если } t\neq 0\\ 0, & \text{если } t=0\end{cases},$$

При $t\neq 0$ можно посчитать $g'(t)=\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}$, но $g'(0)$ придется считать по определению, а именно:

$$g'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}-0}{t}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{t^2}=z,\\ z\to+\infty\end{matrix}\right\|=\lim_{z\to+\infty}\frac{e^{-z}}{\frac{1}{\sqrt{z}}}=$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{\sqrt{z}}{e^z}=0\ \text{(по правилу Лопиталя)}.$$

Аналогично можно посчитать при всех $n>1$, $g^{(n)}(t)$ и $g^{(n)}(0)=0$. Поэтому $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_0^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=0,\ x\in\mathbb{R}$. То есть мы получили, что ряд Тейлора, построенный по функции $f_0(x)$, не равной тождественно нулю, тождественно равен нулю.

Последний пример показывает также, что если $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ есть ряд Тейлора функции $f(x)$, то он же является рядом Тейлора бесконечного множества других функций вида $f+cf_0$, $c\in\mathbb{R}$ – произвольное, поскольку

$(f+cf_0)(x_0)=f(x_0)$ и $(f+cf_0)^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)+cf_0^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$,

$n\in N$.

9.2. Сходимость ряда Тейлора к его производящей функции

Предположим, что функция f бесконечно дифференцируема в интервале I и точка $x_0\in I$, и что промежуток J сходимости её ряда Тейлора

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

накрывает I (названные условия необходимы для решения задачи, сформулированной в заголовке пункта, в силу доказанных в предыдущем параграфе свойств степенных рядов). Частные суммы ряда $S_n(x)=P_n(x;x_0,f)$, $x\in J$, $n\in N$ – многочлены Тейлора функции f в точке x_0. Поэтому сумма ряда

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}P_n(x;x_0,f)$$

для всех $x\in I$ и $S(x)=f(x)$ для $x\in I\subset J$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to+\infty}(f(x)-P_n(x;x_0,f))=0$ для каждого $x\in I$. Поскольку в интервале I для функции f справедлива формула Тейлора, то

$f(x)-P_n(x;x_0,f)=r_n(x;x_0,f)$, $x\in I, n\in N$,

где $r_n(x;x_0,f)$ – n-ый остаточный член в формуле Тейлора функции f на интервале I. Таким образом, имеет место следующее

Утверждение. Если функция f бесконечно дифференцируема в интервале I и точка $x_0\in I$, то

(3) $\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ x\in I,$

тогда и только тогда, когда последовательность $(r_n(x))$ остаточных членов $r_n(x)=r_n(x;x_0,f)$, $n\in N$ в её формуле Тейлора на I сходится к нулевой функции для всех $x\in I$.

Укажем простое достаточное условие для справедливости утверждения (3).

Теорема 9.3 Если функция f бесконечно дифференцируема на отрезке между x_0 и x (на $\mathbb{R}$) и все её производные функции $f^{(n)}(t)$, $n \in N$, равномерно ограничены на этом отрезке, то $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$; то есть ряд Тейлора функции f сходится в точке x к сумме $f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим остаточные члены $r_n(x; x_0, f)$ в форме Лагранжа

$$r_n(x; x_0, f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ 0 < \theta < 1.$$

По условию теоремы, существует число $M > 0$, что $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M$ для всех t между x_0 и x, и всех $n \in N$. Поэтому,

$$(4) \quad |r_n(x; x_0, f)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1},\ x \neq x_0.$$

Обозначим $u_n = \frac{M}{n!}|x - x_0|^n$, $x \neq x_0$, $n \in N$. Тогда $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x - x_0|}{n+1}$, $n \in N$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. Согласно признаку Даламбера, ряд $\sum u_n$ сходится, и следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. На основании (2), $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x; x_0, f) = 0$ и справедливо утверждение (3).

9.3. Ряды Тейлора элементарных функций

I. Функция $f(x) = e^x$. Для нее

$$f^{(n)}(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R},\ n \in N, \text{ и } f^{(n)}(0) = f(0) = 1,\ n \in N.$$

Для произвольного фиксированного $x \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\left|f^{(n)}(t)\right| = e^t \leq e^{|x|}$$

для всех t между 0 и x, и всех $n \in N$. Согласно теореме предыдущего пункта,

$$(5) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{N}.$$

Для сумм $r_n(x)$ остатков ряда (5) справедлива оценка (4), в которой $M = e^{|x|}$ и $x_0 = 0$, так что $|r_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in N$, и последняя оценка указывает на скорость сходимости ряда (5) в точках $x \in \mathbb{R}$.

II. Функция $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ имеет

$f^{(k)}(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), \left|f^{(k)}(x)\right| \leq 1, x \in \mathbb{R}, k \in N,$

и, следовательно, её формула Тейлора переходит в ряд

(6) $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,,\ x \in \mathbb{R}.$

Для сумм $r_n(x)$ остатков ряда (6) в силу (4) справедливы оценки

$|r_{2n}(x)| \leq \frac{1}{(2n)!}|x|^{2n}, x \in \mathbb{R}, n \in N.$

III. Функция $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, имеет

$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right), \left|f^{(k)}(x)\right| \leq 1, x \in \mathbb{R}, k \in N$, и следовательно,

(7) $\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\,,\ x \in \mathbb{R}.$

Для сумм $r_n(x)$ остатков ряда (7) на основании (4) справедливы оценки $|r_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}, x \in \mathbb{R}, n \in N.$

IV. Функция $f(x) = \ln(1 + x)$, $x > -1$, имеет $f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n, x \in (-1,1),$

и радиус сходимости ряда равен 1. Поэтому

$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,$ $x \in (-1,1)$, откуда

(8) $\quad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ x \in (-1,1),$

поскольку $f(0) = \ln 1 = 0$. В $x = 1$ имеем ряд Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$; в точке $x = -1$ получается расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, так что промежуток сходимости ряда (6) служит $(-1,1]$.

V. Биномиальный ряд.

Утверждения этого пункта V приводятся без подробного доказательства.

Разложим в степенной ряд функцию $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $\alpha \in N$, то $(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} C_{\alpha}^{k}\, x^k, x \in \mathbb{R}.$

Если $\alpha = 0$, то $f(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \backslash N_0$, $N_0 = N \cup \{0\}$. Тогда $f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}, \ldots, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$

и при $n > \alpha$ функция $f^{(n)}$ не существует в точке $x = -1$. Отсюда следует, что радиус сходимости R степенного ряда для f удовлетворяет условию $R \leq 1$. Вычисление радиуса даёт $R = 1$. Кроме того,

(9) $(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $|x| < 1$ или $x \in (-1,1)$.

В точке $x = -1$ получаем ряд

(10) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$,

который абсолютно сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha < 0$;

в точке $x = 1$ – ряд

(11) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$,

абсолютно сходится при $\alpha > 0$, сходится условно при $-1 < \alpha < 0$ и ряд расходится при $\alpha \leq -1$.

VI. Использованный в п. IV приём можно применять к любому степенному ряду с ненулевым радиусом сходимости. Продемонстрируем его на примере разложения в степенной ряд функции $f(x) = \mathrm{arctg} x$.

Имеем $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

(12) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots =$
$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1,1)$,
и $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x 1 \cdot dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt =$
$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1,1)$,
откуда

(13) $\mathrm{arctg}\, x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} -$
$\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \ldots$,
$x \in (-1,1)$,
поскольку $f(0) = \mathrm{arctg} 0 = 0$.

9.4. Экспоненциальная функция комплексного переменного

Степенной ряд $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится для всех $z \in \mathbb{C}$, поскольку для его общего члена $a_n(z) = \frac{z^n}{n!}$ при $z \neq 0$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

и применяем признак Даламбера. Обозначим $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Теорема. $\exp(z)\cdot\exp(w) = \exp(z+w)$, $z, w \in \mathbb{C}$**.** Без доказательства.

Таким образом, функция $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяет такому же функциональному уравнению, что и экспоненциальная функция e^x, $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, если $z = x$, то $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому, по определению, обозначают $\exp(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, и

(14) $\quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C}.$

Если в (14) положить $z = ix$, $i^2 = -1$, $x \in \mathbb{R}$, и заметить, что

$i^3 = -i$, $i^4 = 1$, то:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \cos x + i\sin x,$$

$x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, ***доказана формула Эйлера:***

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Она справедлива и для комплексных $z \in \mathbb{C}$ в виде $e^{iz} = \cos z + i\sin z,\ z \in \mathbb{C}$.

Прямым следствием теоремы и формулы Эйлера будет формула Муавра – Эйлера: $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx,\ x \in \mathbb{R},\ n \in N$.

Доказательство. $(e^{ix})^n = e^{inx},\ x \in \mathbb{R},\ n \in N$, и применяем формулу Эйлера.

Глава 10. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

10.1. Ортонормированные системы функций

Множество функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$, образует векторное пространство относительно обычного сложения и умножения функции на число. Легко доказать, что это пространство не является конечномерным, так как, например, функции $x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ линейно независимы.

Предположим, что определено ***скалярное произведение***, то есть билинейная функция, сопоставляющая каждой паре рассматриваемых функций $f(x)$ и

$g(x)$ некоторое число, обозначаемое $(f(x), g(x))$, причем, выполняются свойства

1. $(f(x), g(x)) = (g(x), f(x))$
2. $(f(x), f(x)) \geq 0$, причем, $(f(x), f(x)) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv 0$.
3. $(\alpha f(x) + \beta h(x), g(x)) = \alpha(f(x), g(x)) + \beta(h(x), g(x))$.

Далее будем обозначать скалярное произведение кратко: (f, g).

Имея скалярное произведение, определим норму функции $\|f\|$ равенством $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Определение. Система функций называется ***ортогональной***, если для любых различных функций $f(x)$ и $g(x)$ из этой системы имеем $(f, g) = 0$. Ортогональная система функций называется ***ортонормированной***, если для любой функции этой системы имеет место равенство $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = 1$.

Любую ортогональную систему функций, не содержащую тождественно равную нулю функцию, можно преобразовать в ортонормированную систему функций, положив для любой функции $f(x)$ из этой системы $\varphi(x) = \frac{f}{\|f\|}$.

Рассмотрим пример ***скалярного произведения интегрируемых функций*** $f(x)$ и $g(x)$, определенного равенством

$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Легко видеть, что это равенство обладает свойствами 1 и 3 скалярного произведения. Что касается свойства 2, то оно не выполняется для функций, которые являются интегрируемыми, но не являются непрерывными, то есть из равенства $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ не следует, что $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Например, для функции $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [-1,1], \ x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$, которая не равна тождественно нулю, будет выполняться, что $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = 0$. Ситуация исправится, если мы будем рассматривать только непрерывные функции.

Лемма 10.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $a < b$, и если $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Доказательство.

Если бы тождество $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ не выполнялось, то нашлась бы такая точка x_0, в которой $f^2(x_0) > \varepsilon > 0$. Так как функция непрерывна, то найдется такая окрестность (α, β) этой точки, принадлежащая промежутку $[a, b]$, что в ней справедливо неравенство $f^2(x) > \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\beta - \alpha),$$

что противоречит условию леммы.

Для интегрируемых функций определение ортогональности принимает вид:

Определение 10.2. Две интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными на $[a, b]$, если $\int_a^b f(x)g(x)dx$. Конечная или бесконечная система функций называется ***ортогональной*** на отрезке $[a, b]$, если любые две функции этой системы ортогональны на этом отрезке.

Важный пример ортогональной системы функций дает тригонометрическая система функций.

Теорема 10.1. Тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Доказательство.

Сначала установим ортогональность каждой функции с первой из них:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \cdot \sin nx \,\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin n\pi - \sin(-n\pi) = \frac{1}{n}(0 - 0) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \cdot \cos nx \,\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos(-n\pi)) =$$
$$= \frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos(n\pi)) = 0.$$

Опираясь на известные тригонометрические формулы

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)),$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)),$$

получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n - m)x + \cos(n + m)x)dx = 0, n \neq m,$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx = 0, n \neq m,$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) dx = 0.$

Последнее равенство выполняется и при $n = m$.

10.2. Коэффициенты Фурье.

Рассмотрим множество функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$. Оно образует векторное пространство относительно обычного сложения и умножения функции на число. Пусть определено некоторое скалярное произведение. И пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ – некоторая ортонормированная система.

Определение 10.3. Числа

$c_n = (f, \varphi_n)$

называются ***коэффициентами Фурье*** функции f. А ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$

называется ***рядом Фурье*** функции f.

Вопрос о сходимости ряда Фурье сложен и будет исследован позже. Пока будем использовать формальную запись

$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$

означающую, что функции f соответствует ее ряд Фурье.

10.3. Тригонометрический ряд Фурье, его коэффициенты

Определение 10.4. ***Тригонометрическим многочленом*** называется функция вида

$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx,$

где $A_0, A_k, B_k,\ k = 1, \dots, n$ – действительные числа. Если $A_n^2 + B_n^2 \neq 0$, то число n называется ***порядком (степенью)*** тригонометрического многочлена и имеет место обозначение $\deg T = n$.

Функциональный ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называется ***тригонометрическим рядом***. Коэффициенты ряда $A_0, A_k, B_k,$ $k = 1, \ldots, n, \ldots$ – произвольные действительные числа. ***Частные суммы*** тригонометрического ряда

$$S_0 = \frac{A_0}{2},\quad S_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx\,,\ n \in \mathbb{N}$$

являются тригонометрическими многочленами порядка $\deg S_n \leq n$.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (то есть $f \in R([-\pi, \pi]\,)$). Числа

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

называются ***коэффициентами Фурье*** функции f.

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(независимо от того, сходится он или расходится) коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье функции $f \in R([-\pi, \pi]\,)$), называется ***рядом Фурье этой функции***.

Связь между функцией $f(x)$ и ее рядом Фурье принято обозначать так:

$$f(x)\Big|_{x\in[-\pi,\pi]} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Частными суммами $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ будут тригонометрические многочлены

$$S_0 = \frac{a_0}{2},\quad S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx\,,\ n \in \mathbb{N}$$

являются тригонометрическими многочленами порядка $\deg S_n \leq n$.

Разумеется, если функция $f(x)$ разрывна, то ее ряд Фурье не будет равномерно сходиться к ней (сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна). Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 10.4. Равномерно сходящийся на $[-\pi,\pi]$ тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx$ является рядом Фурье своей суммы.

Доказательство.

Пусть тригонометрический ряд $\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos kx+B_k\sin kx$ равномерно сходится на $[-\pi,\pi]$, и $f(x)$ – его сумма, то есть

$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos kx+B_k\sin kx=f(x)$

и функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$. Более того, пусть $f(x)$ – непрерывная и 2π-периодическая функция на всем множестве $\mathbb{R}$.

Интегрируя почленно этот ряд и учитывая ортогональность тригонометрических функций, получим, что

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_0}{2}dx=A_0,$

и поскольку $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, то $A_0=a_0$.

Умножив равенство $\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos kx+B_k\sin kx=f(x)$ скалярно на $\cos kx$ и проинтегрировав, найдем

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_k\cos^2 kx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_k(1+\cos 2kx)dx=A_k.$

и поскольку $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, то $A_k=a_k$.

Аналогично, умножив равенство $\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos kx+B_k\sin kx$ скалярно на $\sin kx$, покажем, что $B_k=b_k$, так как $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

Тригонометрический многочлен $T(x)$, $\deg T\le n$, $n\in\mathbb{N}$ можно считать (конечным) тригонометрическим рядом, имеющим нулевые коэффициенты f для всех индексов, больших n, и поэтому равномерно сходящимся на всем множестве $\mathbb{R}$. Согласно теореме 10.4, многочлен $T(x)$ совпадает со своим (конечным) рядом Фурье, коэффициенты которого равны нулю для всех индексов, больших индекса $n=\deg T$. В частности, указанным свойством обладают частные суммы ряда Фурье, то есть справедливо следующее утверждение.

Следствие. Для любого $n,\ n = 0,1,2,\ldots$ частные суммы

$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

ряда Фурье

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

функции $f(x) \in R([-\pi,\pi]\,))$ имеют одинаковые с f коэффициенты Фурье для всех индексов $k,\ 0 \le k \le n$.

10.4. Коэффициенты Фурье четных и нечетных функций. Примеры

Напомним, что если функции $f(x), g(x) \in R([-a,a]\,))$ и $f(x)$ – четная, а $g(x)$ – нечетная, то

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0.$

Поэтому, если функция $f(x) \in R([-\pi,\pi]\,))$ и $f(x)$ – четная, то ее коэффициенты Фурье равны

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 0,1,2,\ldots$ и $b_n = 0,\ n = 1,2,\ldots$

поэтому

$f(x)\Big|_{x\in[-\pi,\pi]} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$

А если $f(x)$ – нечетная, то

$a_n = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$ и $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1,2,\ldots$

поэтому

$f(x)\Big|_{x\in[-\pi,\pi]} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$

Пример. Рассмотрим 2π-периодическую четную функцию

$f(x) = |x|,\ x \in [-\pi,\pi], f(-\pi) = f(\pi).$

Тогда $b_n = 0,\ n = 1,2,\ldots$ и

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \pi$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$
$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1),\ n = 1,2,\dots$

Поэтому $a_0 = \pi, a_{2k} = 0,\ a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}$, $k = 1,2,\dots$ (соответствующие преобразования будут подробно рассмотрены на семинарах) и

$f(x)\Big|_{x\in[-\pi,\pi]} = |x|\Big|_{x\in[-\pi,\pi]} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$

Поскольку полученный тригонометрический ряд Фурье равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса (сходится мажорирующий ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$), то в точке $x = 0$ получим

$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

откуда получим, что

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$

поэтому

$A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\cdot A,$

откуда $A = \frac{\pi^2}{6}$, так что

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10.5. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке

Мы установили, что равномерно сходящийся тригонометрический ряд есть ряд Фурье своей суммы (теорема 10.4). Аналогичным свойством обладают ряды Тейлора: степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы. В случае рядов Тейлора расходимость в точке обязательно ведет к расходимости и в одной из половин окрестности точки. Это свойство рядов Тейлора не переносится на ряды Фурье. Ряд Фурье может быть расходящимся в каких-то точках и одновременно быть сходящимся в окрестности этих точек.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in R([-\pi,\pi])$ и потребуем дополнительно, чтобы $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда функция f продолжается на всю числовую прямую $(-\infty, +\infty)$, как 2π-периодическая функция, которая при этом будет интегрируемой на любом отрезке $[a, b], -\infty < a < b < +\infty$. Обратно, любую 2π-периодическую функцию f на $(-\infty, +\infty)$ считаем определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющей условию $f(-\pi) = f(\pi)$.

Укажем теперь достаточные условия сходимости ряда Фурье функции $f(x) \in R([-\pi, \pi])$, $f(-\pi) = f(\pi)$ в точках интервала $(-\pi, \pi)$.

Теорема 10.5. В точке x_0, в которой функция f дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, ряд Фурье сходится, причем его сумма равна $f(x_0)$. В точке x_0 разрыва первого рода функции f для сходимости ее ряда Фурье достаточно предположить существование конечных пределов справа и слева, причем тогда сумма ряда будет равна $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

10.6. Обобщенные тригонометрические ряды Фурье

До сих пор мы говорили о разложении функций, имеющих период 2π, в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Однако могут быть и функции, период которых $2l$ отличен от 2π. В этом случае, если число $\frac{\pi}{l}$ не является целым, то нельзя разложить функцию в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Но можно раскладывать такие функции в ряд по системе $\left\{1, \cos\frac{\pi nx}{l}, \sin\frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

и тогда

$$f(x)\Big|_{x\in(-l,l)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}.$$