МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

(учебное пособие для бакалавриата)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов бакалавриата химического факультета

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления производных «по определению», применения производной и дифференциала.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Вычисление производной функции «по определению»

Иногда функция бывает задана разными формулами на разных частях области определения.

Задача 1. Найти $y'(0)$ и $y''(0)$, если $y(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$

Решение.

Заметим, что при $x \neq 0$ производную $y'(x)$ можно посчитать как производную сложной функции:

$$y'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\,.$$

Но $y'(0)$ и $y''(0)$ вычисляются «по определению»:

$$y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{x^2} = t \\ x = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{matrix}\right\| = \lim_{t\to +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} =$$

$$= \lim_{t\to +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underbrace{=}_{\substack{\text{правило} \\ \text{Лопиталя}}} \lim_{t\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{e^t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}\cdot e^t} = 0.$$

$$y''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{y\prime(x)-y\prime(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{x^2} = t \\ x = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{matrix}\right\| = 2 \cdot \lim_{t\to +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{t\to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underbrace{=}_{\substack{\text{правило} \\ \text{Лопиталя}}} 2 \cdot \lim_{t\to +\infty} \frac{2t}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underbrace{=}_{\substack{\text{правило} \\ \text{Лопиталя}}} 2 \cdot \lim_{t\to +\infty} \frac{2}{e^t} = 0.$$

Ответ: $y'(0) = 0,\ y''(0)$.

Задача 2. Найти $y'(0)$, если $y(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$

Исследовать, кроме того, непрерывность $y(x)$ и $y'(x)$ в точке $x = 0$.

Решение.

Покажем, что функция $y(x)$ непрерывна в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{x^2}_{\to 0}\cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{ограничен}}\right) = 0 = y(0).$$

Найдем $y'(0)$:

$$y'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{x}_{\to 0}\cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{ограничен}}\right) = 0.$$

Заметим, что при $x \neq 0$ производную $y'(x)$ можно посчитать как производную сложной функции:

$$y'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,.$$

Проверим непрерывность функции $y'(x)$ в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} y'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}_{\to 0}\cdot \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{не существует}}\right) -$$

не существует, следовательно, $y'(x)$ не является непрерывной в точке $x = 0$. Заметим, что в этом случае $y''(x)$ в точке $x = 0$ не существует.

Ответ: $y'(0) = 0$; $y(x)$ непрерывна в точке $x = 0$; $y'(x)$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Задача 3. Найти $y'(0)$, если $y(x) = \begin{cases}(x+1)\,\mathrm{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2x, & x \neq 0\\ -2, \ x = -1\,. \end{cases}$

Исследовать, кроме того, непрерывность $y(x)$ и $y'(x)$ в точке $x = -1$.

Решение.

Покажем, что функция $y(x)$ непрерывна в точке $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1} y(x) = \lim_{x\to -1}\left((x+1)\,\mathrm{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to -1}\left(\underbrace{(x+1)}_{\to 0}\cdot \underbrace{\mathrm{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}_{\text{ограничен}} + 2x\right) = -2 = y(-1).$$

Найдем $y'(-1)$:

$$y'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{y(x)-y(0)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right)+2x+2}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to -1} \left(\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right)+2\right) = \frac{\pi^2}{4}+2.$$

Заметим, что при $x \neq -1$ производную $y'(x)$ можно посчитать как производную сложной функции:

$$y'(x) = \operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right) + (x+1)\cdot 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)+2 =$$
$$= \operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right) - 2(x+1)\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot \frac{1}{(x+1)^2+1}+2.$$

Проверим непрерывность функции $y'(x)$ в точке $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1} y'(x) = \lim_{x\to -1}\left(\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right) - 2(x+1)\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot \frac{1}{(x+1)^2+1}+2\right) =$$
$$\lim_{x\to -1}\left(\underbrace{\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}_{\to\frac{\pi^2}{4}} - \underbrace{2(x+1)}_{\to 0}\cdot \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right)}_{\text{ограничен}}\cdot \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2+1}}_{\to 1}+2\right) = \frac{\pi^2}{4}+2.$$

Следовательно, $y'(x)$ является непрерывной в точке $x=-1$. Поэтому можно найти $y'(x)$ в точке $x=-1$ подстановкой $x=-1$ в формулу, полученную при $x\neq -1$.

Ответ: $y'(-1) = \frac{\pi^2}{4}+2$; $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны в точке $x=-1$.

Уравнение касательной к кривой

Уравнения касательной и нормали к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеют вид:

$$y - y_0 = y'_x(M_0)\cdot(x-x_0)$$
$$x - x_0 = -y'_x(M_0)\cdot(y-y_0). \qquad (1)$$

Замечание. Каноническое уравнение прямой на плоскости Oxy имеет вид: $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$, то есть коэффициенты A и B не равны нулю одновременно. В случае, когда $B\neq 0$ уравнение можно записать в виде $y=kx+b$ (наклонные и горизонтальные прямые); если же $B=0$ (но тогда $A \neq 0$), уравнение можно записать в виде $x = \text{c}$ (вертикальные прямые). Поэтому в виде (1) удобно запоминать и находить уравнение касательной и нормали к кривой, но ответ, конечно, нужно записывать в каноническом виде.

Задача 4. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 - x$ в точке $x = x_0 = 3$.

Решение.

В этом случае $y_0 = 9 - 3 = 6$.

$y'(x) = 2x - 1$

$y'(x_0) = y'(3) = 5$.

Уравнение касательной:

$y - 6 = 5 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - 6 = 5x - 15 \Leftrightarrow y = 5x - 9$.

Уравнение нормали:

$x - 3 = -5(y - 6) \Leftrightarrow x - 3 = -5y + 30 \Leftrightarrow x + 5y - 33 = 0$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{33}{5}$.

Ответ: уравнение касательной: $y = 5x - 9$;
уравнение нормали: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{33}{5}$.

Замечание. Напомним, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ ортогональны, если $k_1k_2 = -1$. Не забывайте проверять это, посчитав уравнение касательной и нормали.

Замечание. Иногда уравнение прямой на плоскости удобнее записывать в виде $Ax + By + C = 0$, особенно когда коэффициенты в уравнениях вида $y = kx + b$ и $x = \text{c}$ записываются в виде дробей.

В такой записи прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ортогональны, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Не забывайте проверять это, посчитав уравнение касательной и нормали.

Задача 5. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^{x^2}$ в точке $x = x_0 = 1$.

Решение.

В этом случае $y_0 = 1$.

Найдем $y'(x)$ и $y'(M) = y'(x_0, y_0)$.

$\ln y = x^2 \ln x$

$\frac{1}{y} y'_x = \left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right)$

$y'_x = x^{x^2}(2x \ln x + x)$

$y'_x(M) = 1.$

Уравнение касательной:

$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x.$

Уравнение нормали:

$x - 1 = -1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2.$

Ответ: уравнение касательной: $y = x$;
уравнение нормали: $y = -x + 2$.

Задача 6. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = (\sin x)^{\cos x}$ в точке $x = x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

В этом случае $y_0 = 1$.

Найдем $y'(x)$ и $y'(M) = y'(x_0, y_0)$.

$\ln y = \cos x \ln \sin x$

$\frac{1}{y} y'_x = \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right)$

$y'_x = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right)$

$y'_x(M) = 1(-1 \cdot 0 + 0) = 0.$

Уравнение касательной:

$y-1=0\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=1.$

Уравнение нормали:

$x-\frac{\pi}{2}=0\cdot(y-1)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}.$

Ответ: уравнение касательной: $y=1$;
уравнение нормали: $x=\frac{\pi}{2}$.

Задача 7. Найти уравнение касательной и нормали к кривой
$\begin{cases} x(t)=a(t-\sin t) \\ y(t)=a(1-\cos t), a>0 \end{cases}$ при $t=t_0=\frac{\pi}{2}$.

Решение.

Так как $t_0=\frac{\pi}{2}$, то $x_0=x\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ и
$y_0=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=a.$

Далее,

$x_t'(t)=a(1-\cos t)$

$y_t'(t)=a\sin t$

$y_x'(t)=\frac{y_t'(t)}{x_t'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$

и $y_x'(t_0)=y_x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$y-a=1\cdot\left(x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)\Leftrightarrow y=a+x-\frac{\pi a}{2}+a\Leftrightarrow y=x+2a-\frac{\pi a}{2}.$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$\left(x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)=-1\cdot(y-a)\Leftrightarrow x-\frac{\pi a}{2}+a=-y+a\Leftrightarrow y=-x+\frac{\pi a}{2}.$

Ответ: уравнение касательной: $y=x+2a-\frac{\pi a}{2}$;
уравнение нормали: $y=-x+\frac{\pi a}{2}$.

Задача 8. Найти уравнение касательной и нормали к кривой
$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\sin t + 1 \\ y(t) = e^{-t}\cos t + 2 \end{cases}$ при $t = t_0 = 0$.

Решение.

Так как $t_0 = 0$, то $x_0 = x(0) = 1$ и $y_0 = y(0) = 3$.

Далее,

$$x'_t(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$y'_t(t) = -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-e^{-t}(\cos t + \sin t)}{e^{-t}(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$$

и $y'_x(t_0) = y'_x(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$.

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 4.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x - 1) = 1 \cdot (y - 3) \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = -x + 4$;
уравнение нормали: $y = x + 2$.

Задача 9. Найти уравнение касательной и нормали к кривой
$\begin{cases} x(t) = e^{t}(\cos t + \sin t) \\ y(t) = e^{t}(\cos t - \sin t) \end{cases}$ при $t = t_0 = 0$.

Решение.

Так как $t_0 = 0$, то $x_0 = x(0) = 1$ и $y_0 = y(0) = 1$.

Далее,

$$x'_t(t) = e^{t}(\cos t + \sin t) + e^{t}(-\sin t + \cos t) = 2e^{t}\cos t$$

$$y'_t(t) = e^{t}(\cos t - \sin t) + e^{t}(-\sin t - \cos t) = -2e^{t}\sin t$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-2e^{t}\sin t}{2e^{t}\cos t} = -\operatorname{tg} t$$

и $y'_x(t_0) = y'_x(0) = 0$.

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$y - 1 = 0 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 1.$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$(x - 1) = 0 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow x = 1.$

Ответ: уравнение касательной: $y = 1$;
уравнение нормали: $x = 1$.

Задача 10. Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t \operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases} \quad \text{при } t = t_0 = 0.$$

Решение.

Так как $t_0 = 0$, то $x_0 = x(0) = 0$ и $y_0 = y(0) = 0$.

Далее,

$x'_t(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 + 1)$

$y'_t(t) = \operatorname{arctg} t + t \cdot \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot 2t = \operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t$

$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{\operatorname{arctg} t}{3(t^2+1)}$

и $y'_x(t_0) = y'_x(0) = 0$.

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$y - 0 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 0.$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$(x - 0) = 0 \cdot (y - 0) \Leftrightarrow x = 0.$

Ответ: уравнение касательной: $y = 0$;
уравнение нормали: $x = 0$.

Задача 11. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases}$
при $t = t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Так как $t_0 = \frac{\pi}{2}$, то $x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ и $y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Далее,

$x'_t(t) = \cos t - t\sin t$

$y'_t(t) = \sin t + t\cos t$

$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$

и $y'_x(t_0) = y'_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\pi}{2}\cdot 0}{0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$.

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}\cdot(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$.

Уравнение нормали будет иметь вид:

$(x - 0) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$.

Ответ: уравнение касательной: $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$ (или $4x + 2\pi y - \pi^2 = 0$); уравнение нормали: $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$ (или $\pi x - 2y + \pi = 0$).

Задача 12. Найти уравнение касательной и нормали к кривой
$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\sin t \\ y(t) = e^{-t}\cos t \end{cases}$ при $t = t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Так как $t_0 = \frac{\pi}{4}$, то $x_0 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ и $y_0 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Далее,

$x'_t(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$

$y'_t(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$

$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t}{-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t} = \frac{\cos t + \sin t}{\sin t - \cos t}$.

Заметим, что $y'_x(t)$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$ не определена. В этом случае придется считать

$$\lim_{t\to t_0} y'_x(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t+\sin t}{\sin t-\cos t} = \infty.$$

Это означает, что касательная к кривой в этой точке является вертикальной прямой, а поэтому ее уравнение имеет вид:

$$x = x_0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Соответственно, уравнение нормали будет иметь вид:

$$y = y_0 \Leftrightarrow y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Ответ: уравнение касательной $x = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$;
уравнение нормали: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Задача 13. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $x^3 + 4y^3 - 3yx^2 = 0$ в точке $M_0(-1; 1)$.

Решение.

Найдем производную y'_x:

$$x^3 + 4y^3(x) - 3y(x)x^2 = 0.$$

Продифференцируем равенство по x:

$$3x^2 + 4 \cdot 3y^2 y'_x - 3y'_x x^2 - 3y \cdot 2x = 0.$$

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$$y'_x(12y^2 - 3x^2) = 6xy - 3x^2$$

$$y'_x = \frac{6xy-3x^2}{12y^2-3x^2} = \frac{x}{2y+x}.$$

И тогда $y'_x(M_0) = \frac{-1}{2-1} = -1.$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - 1 = -1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = -x.$$

Уравнение нормали будет иметь вид:

$$(x + 1) = 1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Ответ: уравнение касательной: $y = -x$;
уравнение нормали: $y = x + 2$.

Задача 14. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $2y = 1 + xy^3$ в точке $M(1;1)$.

Решение.

$2y(x) = 1 + xy^3(x)$.

Продифференцируем равенство по x:

$2y'_x = 1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y'_x$.

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$y'_x(2 - 3xy^2) = y^3$

$y'_x = \frac{y^3}{2-3xy^2}$.

Следовательно,

$y'_x(M) = \frac{1}{2-3} = -1$.

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$y - 1 = -1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = -x$.

Уравнение нормали будет иметь вид:

$(x + 1) = 1 \cdot (y - 1) \Leftrightarrow y = x + 2$.

Ответ: уравнение касательной: $y = -x$;
уравнение нормали: $y = x + 2$.

Задача 15. Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей эллипсу.

Решение.

Заметим, что так как точка M_0 принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса, то есть $\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$.

Функция задана неявно. Найдем y'_x.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2(x)}{b^2}=1$$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'_x}{b^2}=0.$$

1) Если $y\neq 0$, то $y'_x=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$.

Следовательно,

$$y'_x(M_0)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}.$$

Поэтому уравнение касательной будет иметь вид:

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}\cdot(x-y_0)\ .$$

Умножим уравнение на $\frac{y_0}{b^2}$, получим

$$\Leftrightarrow\frac{yy_0}{b^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{{x_0}^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\underbrace{\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}}_{\substack{=1,\text{так как}\\ \text{точка } M_0(x_0;y_0)\\ \text{принадлежит эллипсу}}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Заметим, что в этом случае становится «особенно» понятно, почему уравнение прямой надо преобразовывать к каноническому виду.

2) Если точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит эллипсу, то x_0 и y_0 не могут быть равны нулю одновременно. Действительно, если $y_0=0$, то $x_0=\pm a$. Поэтому

$$y'_x(M_0)=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}\right)=\infty\ .$$

Это означает, что касательная в точке $M_0(a;0)$ будет задаваться уравнением $x=a$, касательная в точке $M_0(-a;0)$ будет задаваться уравнением $x=-a$.

Ответ: в точке $M_0(a;0)$ уравнение касательной $x=a$;

в точке $M_0(-a;0)$ уравнение касательной $x=-a$;

во всех остальных точках $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащих эллипсу, уравнение касательной $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Задача 16. Найдите, какие углы образуют с осью Ox касательные к кривой $y = x - x^2$ в точках с абсциссами

А) $x = 0$,

Б) $x = \frac{1}{2}$,

В) $x = 1$.

Решение.

Производная функции в точке $y'_x(M_0)$ задает тангенс угла φ наклона касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке M_0.

В этом случае $y'(x) = 1 - 2x$, поэтому

А) $x = 0$

$y'(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Б) $x = \frac{1}{2}$

$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

В) $x = 1$

$y'(1) = -1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: А) $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Б) $\varphi = 0$. В) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 17. Под каким углом кривые $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \operatorname{tg} x$ пересекают ось Ox в начале координат?

Решение.

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.

$y = \sin 2x$

$y' = 2\cos x$

$y'(0) = 2 \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = 2 \Longrightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 2$.

$y = \operatorname{tg} x$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y'(0) = 1 \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{4}$.

Задача 18. Найти точки, в которых касательные к кривой $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ параллельны оси Ox.

Решение.

Прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ параллельны, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Если же прямые заданы в виде $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ или $x = c_1$ и $x = c_2$, то они будут параллельны, если, соответственно, $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ и $c_1 \neq c_2$.

В нашем случае

$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x.$

Так как касательная должна быть параллельна оси Ox, то должно быть выполнено условие

$\varphi = 0 \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = 0 \Longrightarrow y'(x) = 0.$

$12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(12x^2 + 12x - 24) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 1 \lor x = -2.$

Если $x_0 = 0$, то $y_0 = 20$, и уравнение касательной имеет вид

$y - 20 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 20 \Longrightarrow$ касательная параллельна оси Ox.

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 15$, и уравнение касательной имеет вид

$y - 15 = 0 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 15 \Longrightarrow$ касательная параллельна оси Ox.

Если $x_0 = -2$, то $y_0 = -12$, и уравнение касательной имеет вид

$y + 12 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -12 \Longrightarrow$ касательная параллельна оси Ox.

Так как все касательные не совпадают с осью Ox (не задаются уравнением $y = 0$), то все они параллельны оси Ox.

Задача 19. Показать, что линия $y = x^5 + 3x - 15$ во всех своих точках наклонена к оси Ox под острым углом.

Решение.

В этом случае $y' = 5x^4 + 3$. Легко видеть, что $y' = 5x^4 + 3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Следовательно, во всех точках тангенс угла наклона касательной будет положительным и, следовательно, угол наклона касательной будет острым.

Задача 20. Найти углы, под которыми пересекаются линии $y = \frac{x+1}{x+2}$ и $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$.

Решение.

Найдем точки пересечения заданных линий, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ y = \frac{x^2+4x+8}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ \frac{x+1}{x+2} = \frac{x^2+4x+8}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ 16x + 16 = (x+2)(x^2 + 4x + 8) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ 16x + 16 = x^3 + 4x^2 + 8x + 2x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ x^3 + 6x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{x+2} \\ x = 0 \lor x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \lor \begin{cases} x = -6 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Найдем производные заданных функций.

$$y_1'(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

$$y_2'(x) = \left(\frac{x^2+4x+8}{16}\right)' = \frac{1}{16}(2x+4) = \frac{x+2}{8}.$$

Напомним, что угол между двумя прямыми принимает значения на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Если прямые образуют углы φ_1 и φ_1 с осью Ox, то для того, чтобы найти тангенс угла φ между этими прямыми, достаточно найти модуль тангенса разности этих углов:

$\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)| = \left|\frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}\right|$.

В точке $M_1\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$y_1'(0) = \frac{1}{4}$ и $y_2'(0) = \frac{1}{4} \Longrightarrow$ кривые «пересекаются под углом, равным нулю» $\Longrightarrow$ кривые касаются друг друга в этой точке.

В точке $M_2\left(-6; \frac{5}{4}\right)$

$y_1'(-6) = \frac{1}{16}$ и $y_2'(-6) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{1}{16}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{32}}\right| = \left|\frac{2+16}{32-1}\right| = \frac{18}{31} \Longrightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{18}{31}.$$

Ответ: $\varphi = 0$; $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{18}{31}$.

Задача 21. Найти углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.

Решение.

Найдем точки пересечения заданных линий, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x = 2 \vee x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \neq 0 \end{cases} \vee x \in \emptyset.$$

Найдем производные заданных функций.

$y_1'(x)$:

$2x + 2yy_x' = 0 \Longrightarrow y_1'(x) = -\frac{x}{y}$ при $y \neq 0$.

$y_2'(x)$:

$2yy_x' = 2 \Longrightarrow y_2'(x) = \frac{1}{y}$ при $y \neq 0$.

В точке $M_1(2; 2)$

$$y_1'(M_1) = -1 \text{ и } y_2'(M_1) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-1-\frac{1}{2}}{1-1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}\right| = \left|\frac{-2-1}{2-1}\right| = 3 \Longrightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 3.$$

В точке $M_2(2;-2)$

$y_1'(M_2)=1$ и $y_2'(M_2)=-\frac{1}{2}\Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\left|\frac{2+1}{2-1}\right|=3\Longrightarrow\varphi=\operatorname{arctg}3.$

Ответ: в обеих точках кривые пересекаются под углом $\varphi=\operatorname{arctg}3$.

Дифференциал функции

Приращение $\Delta f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 задается равенством

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\Delta f(x_0)}=\underbrace{\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{df(x_0)}+\circ\,(x-x_0)}_{\Delta f(x_0)},\text{ где}$$

$$df(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ -$$

дифференциал (главная часть приращения) функции $f(x)$ в точке x_0.

Дифференциал функции в произвольной точке x записывается в виде

$$df(x)=f'(x)dx.$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x)=\sin^2 x$.

Решение.

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x.$

$df(x)=\sin 2x\,dx.$

Пример 2. Найти дифференциал функции $f(x)=(\cos x)^{\operatorname{arctg}x}$.

Решение.

$\ln y=\operatorname{arctg}x\ln(\cos x)$

$\frac{1}{y}y_x'=\frac{1}{1+x^2}\ln(\cos x)+\operatorname{arctg}x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$

$y_x'=(\cos x)^{\operatorname{arctg}x}\left(\frac{1}{1+x^2}\ln(\cos x)-\operatorname{arctg}x\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$df(x)=(\cos x)^{\operatorname{arctg}x}\left(\frac{1}{1+x^2}\ln(\cos x)-\operatorname{arctg}x\operatorname{tg}x\right)dx.$

Пример 3. Найти дифференциал функции $f(x)=\ln^3\arcsin\sqrt[3]{x^2-x}$.

Решение.

$$y'_x = 3\ln^2 \arcsin \sqrt[3]{x^2 - x} \cdot \frac{1}{\arcsin \sqrt[3]{x^2-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-x)^{\frac{2}{3}}}} \cdot \frac{1}{3(x^2-x)^{\frac{2}{3}}} \cdot (2x-1)$$

$$df(x) = \ln^2 \arcsin \sqrt[3]{x^2 - x} \cdot \frac{1}{\arcsin \sqrt[3]{x^2-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-x)^{\frac{2}{3}}}} \cdot \frac{1}{(x^2-x)^{\frac{2}{3}}} \cdot (2x-1)dx.$$

Вычисление приближенных значений

Поскольку

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \circ\,(x - x_0)$,

где $\circ\,(x - x_0) \to 0$ при $x - x_0 \to 0$, то можно сказать, что

$f(x) \approx f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Это «приближенное» равенство позволяет вычислять приближенные значения функций в «плохих» точках.

Пример 4. Вычислить приближенное значение функции $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ в точке $x = 1{,}03$.

Решение.

В качестве x_0 возьмем $x_0 = 1$. Тогда $f(x_0) = f(1) = -5$.

$f'(x) = 3x^2 - 8x - 5 \Longrightarrow f'(x_0) = f'(1) = -10$.

И, следовательно,

$f(1{,}03) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -5 - 10 \cdot (1{,}03 - 1) = -5 - 0{,}3 = -5{,}3$.

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение на калькуляторе, то получится $f(1{,}03) = -5{,}300873 \ldots$

Пример 5. Вычислить приближенное значение $\sqrt[4]{17}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Тогда условие задачи означает, что надо найти значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17$.

В качестве x_0 возьмем $x_0 = 16$. Тогда $x - x_0 = 1$ и $f(x_0) = f(16) = 2$.

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} \Longrightarrow f'(x_0) = f'(16) = \frac{1}{4(16)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{32}.$

И, следовательно,

$\sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = 2{,}03 \ldots \approx 2{,}03.$

Заметим, что если попробовать посчитать «точное» значение на калькуляторе, то получится $\sqrt[4]{17} = 2{,}030543 \ldots$