МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

(для бакалавриата)

КОЗКО А.И., ЛУЖИН А.А., ЛУЖИНА Л.М., ЧИРСКИЙ В.Г.

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

бакалавриата химического факультета

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления пределов последовательностей и пределов функций. Продолжение этой темы – в разработке «Формула Тейлора. Правила Лопиталя»

Предел последовательности.
Предел функции.
Первый и второй замечательные пределы

Определение. Если каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставлено число $a_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана ***последовательность*** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Иными словами, последовательность представляет собой отображение множества натуральных чисел во множество действительных чисел:

$1 \to f(1) = a_1 \in \mathbb{R}$
$2 \to f(2) = a_2 \in \mathbb{R}$
$3 \to f(3) = a_3 \in \mathbb{R}$
…
$n \to f(n) = a_n \in \mathbb{R}$
…

Примеры.

1. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = \frac{1}{n} = a_n$. Последовательность можно записать так:
   $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = f(1), f(2), f(3), \dots f(n) \dots = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
2. Последовательность $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = (-1)^n = a_n$. Последовательность можно записать так:
   $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = f(1), f(2), f(3), \dots f(n) \dots =$
   $= (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, \dots (-1)^n, \dots = -1, 1, -1, \dots, (-1)^n \dots$
3. Последовательность $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = 2^n = a_n$. Последовательность можно записать так:
   $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = f(1), f(2), f(3), \dots f(n) \dots =$
   $= 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots = 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n \dots$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ имеет ***предел, равный числу A,*** тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $n > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Удобно записывать это определение с помощью логических символов: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > N(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$.

Для обозначения предела последовательности используется символ: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Замечание. Условие $|a_n - A| < \varepsilon$ означает, что $-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$ и $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Тогда предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ равен числу A, если какой бы мы ни взяли интервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, симметричный относительно точки A, все члены последовательности, начиная с некоторого $(a_{N(\varepsilon)+1})$, будут находиться на этом интервале, то есть первые $N(\varepsilon)$ членов последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N(\varepsilon)}$ могут находиться где угодно, но все остальные (их бесконечно много) $a_{N(\varepsilon)+1}, a_{N(\varepsilon)+2}, a_{N(\varepsilon)+3}, \dots$ находятся строго внутри интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. При этом для каждого $\varepsilon > 0$ номер $N(\varepsilon)$ будет свой.

Интервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ называют ***«эпсилон»-окрестностью точки A*** и обозначают $U_\varepsilon(A)$.

Примеры.

1) Если $a_n = A$ для всех n, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то есть, если $f(n) = A$, что означает, что все члены последовательности одинаковые, то и предел последовательности равен этому числу A.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $N(\varepsilon)$, и любого n $|a_n - A| = |A - A| = 0 < \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} A = A$.

2) Если $a_n = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Доказательство. Интуитивно ясно, что при $n \to \infty$ дробь $\frac{1}{n}$ стремится к нулю (действительно, если числитель дроби равен единице, а знаменатель становится все больше и больше, то дробь становится все меньше и меньше).

Проведем строгое доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Тогда, если

$n > N(\varepsilon)$,

то $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Leftrightarrow n\varepsilon > 1$

и значит $\frac{1}{n} < \varepsilon$,

поэтому $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Определение. Функция $f(x) = [x]$ – целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x (откуда следует, что $[x] \leq x \leq [x] + 1$). Например,
$[2] = 2$
$[-2] = -2$
$[2{,}5] = 2$ и $[2{,}5] = 2 \leq 2{,}5 \leq 2 + 1 \leq [2{,}5] + 1$
но (внимание!) $[-2{,}5] = -3$ и $[-2{,}5] = -3 \leq -2{,}5 \leq -3 + 1 \leq [-2{,}5] + 1$.

Замечание. Не следует отождествлять понятие предела последовательности и предельной точки множества значений, принимаемых последовательностью. В первом из приведённых выше примеров последовательность имеет предел, но множество её значений состоит из одной точки и не имеет предельных точек. Во втором примере предельная точка множества значений – точка 0 – совпадает с пределом последовательности. Может оказаться и так, что предельная точка множества значений не является пределом последовательности (а является так называемым частичным пределом последовательности).

Напомним, что предельная точка множества, это точка, в любой окрестности которой содержится точка, принадлежащая множеству. Например, для множества $M = (0; 1]$ точка 1 является предельной и принадлежит множеству M, а точка 0 также является предельной, но не принадлежит множеству M. Вообще, каждая точка интервала $(0; 1)$ является предельной для множества M.

Перейдём к определению понятия предела функции. Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{W}(a)$ точки a. (Отметьте, что функция $f(x)$ может быть не определена в самой точке a).

Определение. Проколотая окрестность $\dot{W}(a)$ точки a – это окрестность точки a, не содержащая саму точку a. В частности, $\dot{W}_\varepsilon(a)$ – это интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, не содержащий точку a, то есть $\dot{W}_\varepsilon(a)$ является объединением двух интервалов, а именно:
$\dot{W}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ ***предел, равный числу A***, когда для любой окрестности $V(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, такая, что выполняется включение $f(\dot{U}(a)) \subset V(A)$, что равносильно тому, что для любого $x \in \dot{U}(a)$ выполняется $f(x) \in V(A)$. С помощью логических символов это определение записывается так:

$$\forall\, V(A)\ \exists\ \dot{U}(a){:}\ \ \forall x \in \dot{U}(a)\ \ f(x) \in V(A)$$

или так

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon, a) > 0\ \ \ \forall\ x{:}\ \ 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Запись $\delta(\varepsilon, a)$ означает, что число δ зависит от точки a, в которой вычисляется предел и от выбранного $\varepsilon > 0$ и при различных a и ε будет, вообще-то говоря, разным.

Данное определение называется ***определением предела функции по Коши***.

Для обозначения этого предела используется символ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Теорема 1. ***Если предел последовательности*** $\{a_n\}$ ***существует, то он единствен, то есть, если*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_1$ ***и если*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_2$***, то*** $A_1 = A_2$.

Если предел функции $f(x)$ ***при*** $x \to a$ ***существует, то он единствен, то есть, если*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2$, ***то*** $A_1 = A_2$.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}, n \in \mathbb{N}$ называется ***бесконечно малой,*** если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Аналогично, функция $\alpha(x)$ – ***бесконечно малая*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Примеры.

1. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = \frac{1}{n} = a_n$.
   Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой.
2. Последовательность $\left\{2^{-n} = \frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. В этом случае $f(n) = 2^{-n} = a_n$.
   Так как $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, то последовательность $\left\{2^{-n} = \frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой.
3. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ в точке $x = 0$.
   Так как $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, то функция $f(x) = x^2$ является бесконечно малой в точке $x = 0$.
4. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$ в точке $x = 0$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, то функция $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой в точке $x = 0$.

5. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$ в точке $x = \pi$.
   Так как $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x = 0$, то функция $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой в точке $x = \pi$.

Теорема 2. ***Предел последовательности $\{a_n\}$ существует и равен числу A тогда и только тогда, когда a_n можно представить в виде $a_n = A + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ − бесконечно малая последовательность.***

Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то есть $a_n \to A$ при $n \to \infty$, то разность $a_n - A$ будет стремиться к 0 при $n \to \infty$. То есть $a_n = A + \underbrace{(a_n - A)}_{\text{бесконечно малая}}$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Действительно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то есть $f(x) \to A$ при $x \to a$, то разность $f(x) - A$ будет стремиться к 0 при $x \to a$. То есть $f(x) = A + \underbrace{(f(x) - A)}_{\text{бесконечно малая}}$.

Определение. Функция $\beta(x)$ называется ***ограниченной*** при $x \to a$, если она ограничена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$, то есть если существует такое число C, что для всех x из проколотой окрестности точки $\dot{U}(a)$ выполнено неравенство $|\beta(x)| < C$. В виде логических формул это выглядит так:
$\exists\, C \;\; \forall x \in \; \dot{U}(a) \quad |\beta(x)| < C.$

Теорема 3. ***(Свойства бесконечно малых)***

1. ***Если $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ − бесконечно малые при $x \to a$, то алгебраическая сумма $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ тоже бесконечно малая при $x \to a$.***
2. ***Если $\alpha(x)$ − бесконечно малая и $\beta(x)$ − ограниченная при $x \to a$, то произведение $\alpha(x)\beta(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$.***
3. ***Если $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ − бесконечно малые при $x \to a$, то произведение $\alpha_1(x)\alpha_2(x)$ − тоже бесконечно малая при $x \to a$.***

Бесконечно малые последовательности обладают аналогичными свойствами:

1. ***Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то алгебраическая сумма $\{\alpha_n\} \pm \{\beta_n\}$ тоже бесконечно малая последовательность.***
2. ***Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, а $\{\gamma_n\}$ – ограниченная последовательность (то есть $\exists c$: $\forall n \; |\gamma_n| < c$), то $\{\alpha_n \cdot \gamma_n\}$ – бесконечно малая последовательность.***
3. ***Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то произведение $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.***

Лемма. ***Если $\beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то она ограничена при $x \to a$.*** (Обратное утверждение неверно!).

Примеры.

1. Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

   В этом случае $f(n) = \frac{1}{n} = a_n$.

   Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то есть последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, то она ограничена. Действительно, $\frac{1}{n} \leq 1$ при любом натуральном n.
2. Рассмотрим последовательность $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Эта последовательность является ограниченной, так как $|(-1)^n| \leq 1$ при любом натуральном n. Но эта последовательность предела не имеет.

Теорема 4. ***(Арифметические свойства предела). Пусть две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеют при $x \to a$, соответственно, пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$. Тогда предел суммы, разности, произведения, и, если $A_2 \neq 0$, то и частного этих функций равны, соответственно, сумме, разности, произведению и частному значений этих пределов, то есть $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2$, $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) - f_2(x)) = A_1 - A_2$, а также $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = A_1 \cdot A_2$. Если же $A_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$.***

Аналогичная теорема верна и для последовательностей.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a_n}+\boldsymbol{b_n})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a_n}-\boldsymbol{b_n})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},$$

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a_n}\cdot\boldsymbol{b_n})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B},$$

а если $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, ***то и*** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{a_n}}{\boldsymbol{b_n}}=\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}\cdot$

Примеры.

1. Рассмотрим последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
   Так как существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, то существует и предел суммы и разности этих последовательностей
   $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\pm\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\pm\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\pm0=0,$
   существует и предел произведения этих последовательностей
   $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\cdot0=0.$
   Но так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, то теорема о существовании конечного предела отношения последовательностей $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{2^n}$ в этом случае не выполняется.
2. Рассмотрим функции $f(x)=x^2$ и $\sin x$. Так существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ и $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$,
   то существует конечный предел суммы и разности этих функций $\lim\limits_{x\to0}(x^2\pm\sin x)$, причем,
   $\lim\limits_{x\to0}(x^2\pm\sin x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\pm\lim\limits_{x\to0}\sin x=0\pm0=0,$
   существует крнечный предел произведения этих функций $\lim\limits_{x\to0}(x^2\cdot\sin x)$, причем,
   $\lim\limits_{x\to0}(x^2\cdot\sin x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin x=0\cdot0=0.$
   Но так как $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, то теорема о существовании конечного предела отношения функций $\sin x$ и x^2 в этом случае не выполняется.

Определение. Если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0<x-a<\delta$ выполнено неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$

при стремлении x к точке a справа и обозначают это так: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.
Использовав логические символы, получим

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \ \ 0 < x - a < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Аналогично, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $-\delta < x - a < 0$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении x к точке a слева*** и обозначают это так: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$.
Использовав логические символы, получим

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \ -\delta < x - a < 0 \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема 5. ***Функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ предел, равный A, тогда и только тогда, когда она имеет пределы при стремлении x к точке a справа и слева, причем оба эти предела равны A.***

Замечание. Разумеется, для пределов справа и слева верны все теоремы об арифметических свойствах предела.

Определение 7. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что для всех $x > M(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении x к плюс-бесконечности*** и обозначают это так $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

С использованием логических символов это записывается так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M(\varepsilon) \ \forall x > M(\varepsilon) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что для всех $x < M(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении x к минус-бесконечности*** и обозначают это так $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

С использованием логических символов это записывается так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M(\varepsilon) \ \forall x < M(\varepsilon) \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Наконец, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$|f(x)-A|<\varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении x к бесконечности*** и обозначают это так $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

С использованием логических символов это записывается так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, M(\varepsilon)\ \forall x\colon\ |x|>M(\varepsilon)\ \ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Замечание. Разумеется, для пределов при стремлении x к бесконечности, перечисленных выше, верны все теоремы об арифметических свойствах предела.

Примеры.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x}$. При $x\to+\infty$ для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ будет выполнено $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Поэтому предел функции $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$ равен 0.
2. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x}$. При $x\to-\infty$ для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ будет выполнено $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. Поэтому предел функции $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x\to-\infty$ равен 0.
3. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x}$. Так как $|f(x)|=\frac{1}{|x|}$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$.

Определение. Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***бесконечно большой последовательностью****,* если для любого числа $M>0$ существует такое число N, что $|b_n|>M$ при всех натуральных $n>N$.
Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} b_n=\infty$.

Примеры.

1. Последовательности $\{b_n=n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n=n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n=-n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n=-n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n=(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$, очевидно, являются бесконечно большими.

Теорема 6. ***Если (b_n) – бесконечно большая последовательность, то последовательность $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ – бесконечно малая. Если (α_n) – бесконечно малая последовательность и $\alpha_n\neq 0$, $n\in N$, то последовательность $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ – бесконечно большая.***

Примеры.

1. Последовательности $\{b_n = n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n = n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n = -n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n = -n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n = (-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$, являются бесконечно большими. При этом последовательности $\left\{b_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n = \frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n = -\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n = -\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ являются бесконечно малыми.

Определение. Если члены последовательности $\{b_n\}$ становятся положительными, начиная с некоторого номера, и для любого числа $M > 0$ существует такое натуральное число N, что $b_n > M$ при всех $n > N$, то используется запись $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и говорят, что *последовательность* $\{b_n\}$ *стремится к* $+\infty$.

Если члены последовательности $\{b_n\}$ становятся отрицательными, начиная с некоторого номера, и для любого числа $M < 0$ существует такое натуральное число N, что $b_n < M$ при всех $n > N$, то говорят, что *последовательность* $\{b_n\}$ *стремится к* $-\infty$, что обозначают символом $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Ещё раз отметим, что записи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ носят символический характер и используются только для обозначения бесконечно большой последовательности, положительной бесконечно большой последовательности и отрицательной бесконечно большой последовательности, а каждая из этих типов последовательностей не имеет предела; то есть не является сходящейся последовательностью.

Числовую последовательность называют расходящейся, если она не сходится (не имеет предела). Бесконечно большие последовательности составляют часть расходящихся последовательностей. Расходящейся последовательностью будет любая неограниченная последовательность, поскольку всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Определение. По аналогии с тем, как было определено понятие бесконечно большой последовательности, можно определить понятие бесконечного предела функции. Говорят, что функция ***f* имеет при *x* → *a* предел, равный** $+\infty$, если a – предельная точка области определения функции f и если для всякого числа $K > 0$ существует $\delta = \delta\,(K) > 0$ такое, что для всех x, $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > K$.

Например, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, так как для любого $K > 0$ при x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$, имеем $\frac{1}{x^2} > K$.

Говорят, что предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, если a – предельная точка области определения функции f и для любого $\widetilde{K} < 0$ существует $\delta = \delta\left(\widetilde{K}\right) > 0$ такое, что если $0 < |x - a| < \delta$, то $f(x) < \widetilde{K}$.

Наконец, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если a – предельная точка области определения функции f и для любого $K > 0$ существует $\delta = \delta\,(K) > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ имеем $|f(x)| > K$.

Например, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$, так как для любого $\widetilde{K} < 0$ при $0 < |x| < \frac{1}{|\widetilde{K}|}$ выполняется $\frac{-1}{|x|} < -\left|\widetilde{K}\right| = \widetilde{K}$.

Другой пример: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, так как для любого $K > 0$ при $0 < |x| < \frac{1}{K}$ имеем $\left|\frac{1}{x}\right| > K$.

Точно так же можно определить бесконечные пределы при $x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$. Подчеркнем, что функция, имеющая бесконечный предел, не имеет предела в обычном смысле точно так же, как это было для бесконечно большой последовательности.

Теорема 7. ***Если*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$***,*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = +\infty}$***,*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = +\infty}$***, то:*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_1(x) + f_2(x) = +\infty}$***;***

для любого числа $\boldsymbol{c > 0}$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} cf(x) = +\infty}$***,***

для любого числа $\boldsymbol{c < 0}$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} cf(x) = -\infty}$***,***

при $\boldsymbol{c = 0}$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} 0 \cdot f(x) = 0}$***;*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot f_2(x) = +\infty}$.

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, то ничего определенного о пределах $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x) - f_2(x)\right)$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ сказать нельзя. Они представляют собой так называемые неопределённости типа $[\infty - \infty]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, которые требуют дополнительного исследования.

В качестве первого примера рассмотрим функции $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x$. Обе они стремятся к $+\infty$ при $x \to +\infty$. При этом
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} (2x - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$.

Другой пример: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$. В этом случае $f_1(x) - f_2(x) = -x$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl(f_1(x) - f_2(x)\bigr) = -\infty$.

Пусть теперь $f_1(x) = f_2(x) = x$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl(f_1(x) - f_2(x)\bigr) = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$.

Это были примеры неопределённости вида $(\infty - \infty)$. Рассмотрим примеры неопределённостей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Пусть, например, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$. Очевидно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Если же $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Если же $f_1(x) = 5x$, $f_2(x) = x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5$.

Примеры вычисления пределов

Пример 1. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+5}{2n^2+10}$.

Решение: сразу применить теорему о пределе частного не удастся, так как здесь имеем неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Заметим, что «главными виновниками» того, что числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞, являются слагаемые n^2 (в числителе) и $2n^2$ (в знаменателе). Поэтому сначала разделим числитель и знаменатель на n^2 и получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{10}{n^2}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, то по сформулированным выше теоремам равны нулю пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{10}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Подробная запись решения в этом случае выглядела бы так:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+5}{2n^2+10} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{10}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{10}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^2}} = \frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Подобные рассуждения мы будем проводить и в дальнейшем, но записывать их будем не так подробно.

Пример 2. Пусть $P(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + a_{k-2}n^{k-2} \ldots + a_0$, $a_k \neq 0$, $Q(n) = b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \cdots + b_0$, $b_m \neq 0$ – многочлены. Тогда, если $k < m$ (то есть степень числителя меньше степени знаменателя), то

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=0$, если $k=m$ (то есть степень числителя равна степени знаменателя), то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_k}{b_m}$ $(k=m)$, а если $k>m$ (то есть степень числителя больше степени знаменателя), то $\frac{P(n)}{Q(n)}-$ бесконечно большая последовательность. Доказательство. Если $k=m$, то $\frac{P(n)}{n^k}=a_k+a_{k-1}n^{-1}+\dots+a_0n^{-k}$ и $\frac{Q(n)}{n^k}=b_m+b_{m-1}n^{-1}+\dots+b_0n^{-k}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^k}=a_k$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q(n)}{n^m}=b_m$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{P(n)}{n^k}}{\frac{Q(n)}{n^m}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_k}{b_m}=\frac{a_k}{b_m}$. Если $k<m$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^k}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q(n)}{n^k}=b_m$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{P(n)}{n^k}}{\frac{Q(n)}{n^m}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0}{b_m}=0$. Если $k>m$, то рассмотрим последовательность $\frac{Q(n)}{P(n)}$. Как в предыдущем случае, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q(n)}{P(n)}=0$, что, по теореме, сформулированной выше, означает, что $\frac{P(n)}{Q(n)}-$ бесконечно большая последовательность.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$.

Решение. Легко видеть, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ и $|\sin x|\le 1$, поэтому $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin x$ представляет собой произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину и, следовательно, по теореме $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

Предел последовательности

Задача 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1-(n^3-3n^2+3n-1)}{n^2+2n+1+n^2-2n+1)}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{2n^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0}{1+0}=3$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Определение. Пусть n – натуральное число.
Тогда $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n$.
Отдельно определяется $0!=1$.
Заметим, что $n!=(n-1)!\cdot n=(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n$ и т.д.

Например, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 6! \cdot 7 = 5! \cdot 6 \cdot 7$.

Задача 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!-n!} \boxed{\equiv}$

Заметим, что здесь «главным виновником» того, что числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞, является $n!$. Поэтому сократим дробь (то есть поделим числитель и знаменатель дроби) на $n!$, получим, что

$\boxed{\equiv} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Задача 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)} \boxed{\equiv}$

здесь «главным виновником» того, что числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞, является $(n+1)!$. Поэтому сократим дробь (то есть поделим числитель и знаменатель дроби) на $(n+1)!$, получим

$\boxed{\equiv} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)+1}{(n+2)(n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+5n+6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \boxed{\equiv}$

поделим числитель и знаменатель дроби на n^2, получим

$\boxed{\equiv} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

Заметим, что в числителе и знаменателе стоят суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии. Члены геометрической прогрессии имеют вид: $a_1 = a, a_2 = aq, a_3 = aq^2, a_4 = aq^3, \dots, a_n = aq^{n-1}, \dots$ Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$. Поэтому сумма $n+1$ первых члена геометрической прогрессии равна $S_{n+1} = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

В нашем случае в числителе $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, поэтому

$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$.

У геометрической прогрессии, стоящей в знаменателе, $a = 1$, $q = \frac{1}{3}$, поэтому

$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$.

Следовательно, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0.$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ всегда при $|q|<1.$

Задача 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right).$

Заметим, что в числителе первой дроби стоит сумма n членов арифметической прогрессии. Члены арифметической прогрессии имеют вид: $a_1=a, a_2=a+d, a_3=\ a+2d, a_4=\ a+3d, \dots a_n=a+(n-1)d, \dots$, а сумма n первых членов арифметической прогрессии равна $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$ В нашем случае $a=1,\ d=1, a_1=1, a_n=n$, поэтому $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+n}{2}\cdot n$. Подставим это выражение в числитель первой дроби, получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-(n^2+2n)}{2(n+2)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\frac{4}{n}}=-\frac{1}{2}.$$

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}.$

Заметим, что в этом случае неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ обеспечивают (то есть являются «главными виновниками» того, что числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности) слагаемые 2^n в числителе и знаменателе дроби, поэтому поделим числитель и знаменатель дроби на 2^n, получим

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=1$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$

Задача 7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}.$

Так как при $n\to\infty$ дробь $\frac{1}{n}$ стремится к нулю, то $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1.$ Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Задача 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)$.

Заметим, что $\sqrt{2n+3}$ и $\sqrt{2n+1}$ стремятся к бесконечности при $n\to\infty$, поэтому

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right) = [\infty-\infty] \boxed{=}$

умножим числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)$, получим

$\boxed{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)}{\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)} \boxed{=}$

теперь в числителе стоит произведение разности двух величин на сумму этих величин, которая равна разности квадратов этих величин, кроме того, $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, поэтому

$\boxed{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+3}\right)^2-\left(\sqrt{2n+1}\right)^2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(2n+1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}} = 0,$

так как знаменатель дроби, очевидно, стремится к $+\infty$.

Предел функции

При вычислении пределов функций мы будем пользоваться следующими фактами, которые были доказаны на лекциях.

$\lim\limits_{x\to a}P_n(x)=P(a)$, то есть предел многочлена при $x\to a$ равен значению многочлена в точке a.

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, то есть предел функции $\sin x$ при $x\to a$ равен значению $\sin x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a}\arcsin x=\arcsin a$, $a\in[-1;1]$, то есть предел функции $\arcsin x$ при $x\to a$ равен значению $\arcsin x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$, то есть предел функции $\cos x$ при $x\to a$ равен значению $\cos x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a}\arccos x=\arccos a$, $a\in[-1;1]$, то есть предел функции $\arccos x$ при $x\to a$ равен значению $\arccos x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$, $a\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, то есть предел функции $\operatorname{tg} x$ при $x\to a\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ равен значению $\operatorname{tg} x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$, то есть предел функции $\operatorname{arctg} x$ при $x \to a$ равен значению $\operatorname{arctg} x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a,\ a \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то есть предел функции $\operatorname{ctg} x$ при $x \to a \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ равен значению $\operatorname{ctg} x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} a$, то есть предел функции $\operatorname{arcctg} x$ при $x \to a$ равен значению $\operatorname{arcctg} x$ в точке a.

$\lim\limits_{x\to a} u^x = u^a$, то есть предел показательной функции u^x при $x \to a$ равен значению u^x в точке a.

$\lim\limits_{x\to a} \log_b x = \log_b a$ при $a > 0$, то есть предел логарифмической функции $\log_b x$, при $x \to a,\ a > 0$ равен значению $\log_b x$ в точке a.

Кроме того, не забываем, что пока $f(x)$ стоит под знаком предела, $x \in \dot{U}(a)$, то есть x принадлежит проколотой окрестности точки a, и значит, $x \neq a$ и $x - a \neq 0$.

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

Заметим, что значение стоящего в знаменателе многочлена не равно нулю при $x = -1$, поэтому

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x-6)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+2)} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} x - \lim\limits_{x\to -1} 6}{\lim\limits_{x\to -1} x^2 - 3\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 2} = \frac{1-1-6}{1+3+2} = -1.$$

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

Заметим, что в этом случае при $x = 2$ числитель и знаменатель дроби равны нулю, то есть получаем неопределенность

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \left[\frac{4+2-6}{4-6+2}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] \boxed{=}$$

Найдем корни уравнений $x^2 + x - 6 = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$, разложим числитель и знаменатель дроби в произведение, получим

$$\boxed{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} \boxed{=}$$

так как x находится в проколотой окрестности точки 2, то $x - 2 \neq 0$, поэтому дробь на $(x - 2)$ можно сократить, получим

$\boxed{\equiv} \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x-1)}=\frac{2+3}{2-1}=5.$

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Заметим, что в этом случае при $x=1$ числитель и знаменатель дроби равны нулю, то есть получаем неопределенность

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left[\frac{1-2+1}{1-1}\right]=\left[\frac{0}{0}\right] \boxed{\equiv}$$

разложим числитель и знаменатель дроби в произведение, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \boxed{\equiv}$$

так как x находится в проколотой окрестности точки 1, то $x-1\neq 0$, поэтому дробь на $(x-1)$ можно сократить, получим

$$\boxed{\equiv} \quad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{1-1}{1\cdot(1+1)}=0.$$

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

В этом случае знаменатели дробей стремятся к нулю, то есть $\lim\limits_{x\to 2}(x(x-2)^2)=0$ и $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$. Поэтому при $x\to 2$ обе дроби стремятся к бесконечности, и мы получаем

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)=[\infty-\infty] \boxed{\equiv}$$

неопределенность $[\infty-\infty]$ означает, что предел разности нельзя сводить к разности пределов, оба слагаемых надо рассматривать вместе, то есть нужно привести дроби к общему знаменателю:

$$\boxed{\equiv} \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-3-x(x-2)}{x(x-2)^2(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-3}{x(x-2)^2(x-3)}=$$
$$=\left[\frac{-4+6-3}{0}\right]=\infty.$$

Здесь запись $\left[\frac{-4+6-3}{0}\right]=\left[\frac{-1}{0}\right]$ означает, что числитель дроби $\frac{-x^2+3x-3}{x(x-2)^2(x-3)}$ стремится к -1, а знаменатель этой дроби стремится к 0, поэтому сама дробь $\frac{-x^2+3x-3}{x(x-2)^2(x-3)}$ стремится к ∞.

Задача 5. Вычислить $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=\lim_{h\to 0}(3x^2)+\lim_{h\to 0}(3xh)+\lim_{h\to 0}(h^2)\ \boxed{=}$$

в этом примере мы считаем предел при ***каждом фиксированном*** $\boldsymbol{x}$, то есть при каждом фиксированном x, величины $3x^2$ и $3x$ являются постоянными множителями, и их можно вынести из-под знака предела:

$$\boxed{=}\ 3x^2\lim_{h\to 0}1+3x\lim_{h\to 0}h+\lim_{h\to 0}(h^2)=3x^2+0+0=3x^2.$$

Заметьте, что мы посчитали производную функции $f(x)=x^3$.

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

В таких задачах, как правило, предполагается, что нужно посчитать два отдельных предела. Иногда часть преобразований можно сделать сразу для обоих случаев.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[+\infty-(-\infty)]=[+\infty+\infty]=+\infty$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[+\infty-(+\infty)]\ \boxed{=}$
умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x^2+1}+x$, получим
$$\boxed{=}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0,$$
так как знаменатель стремится к $+\infty$.

Задача 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

В этом случае при $x\to 5$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Умножим числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{x-1}+2)$, получим

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)-2^2}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\ \boxed{=}$$

так как x находится в проколотой окрестности точки 5, то $x-5\neq 0$, поэтому дробь на $(x-5)$ можно сократить, получим

$$\boxed{=}\ \lim_{x\to 5}\frac{1}{(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Задача 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

В этом случае $\sqrt{x^2-2x-1}$ и $\sqrt{x^2-7x+3}$ стремятся к $+\infty$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, то есть получаем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=[+\infty-(+\infty)]\ \boxed{=}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

(эта сумма положительна при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$), получим

$$\boxed{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x-1-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}.$$

Не забывайте, что $\sqrt{x^2}\equiv|x|$!

Далее будем отдельно рассматривать два случая:

1) При $x\to+\infty$ будет выполняться $|x|=x$ и поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

2) При $x\to-\infty$ переменная x принимает отрицательные значения, и поэтому $|x|=-x$. Получим, что

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-4}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-4}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{-\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{5}{-(1+1)}=-\frac{5}{2}.$$

Задача 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

В этом случае вновь возникает неопределенность

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\boxed{=}$

Одна из глобальных идей в математике – замена переменной. Обозначим $\sqrt[6]{x+1}=t$. Тогда при $x\to 0$ получим, что $t\to 1$ и $\sqrt{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3=t^3$, а $\sqrt[3]{x+1}=\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2=t^2$ и поэтому для новой переменной t получим

$\boxed{=}\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{(t^2+t+1)}{(t+1)}=\frac{3}{2}$.

Теорема. (***первый замечательный предел***)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Определение. В случае, когда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, говорят, что эти функции ***эквивалентны*** при $x\to a$ и обозначают это так: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$. При этом предполагаем, что в некоторой проколотой окрестности точки a определены как дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$, так и дробь $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Отметим, что определение эквивалентности функций задаёт на множестве функций, определённых в некоторой проколотой окрестности точки a отношение эквивалентности. Действительно, из определения эквивалентности функций сразу следует, что: $f(x)\sim f(x)$ и если $f(x)\sim g(x)$, то и $g(x)\sim f(x)$. Из теоремы о пределе произведения получаем: если $f(x)\sim g(x)$ и $g(x)\sim h(x)$, то $f(x)\sim h(x)$. В самом деле, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=1$ и следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)}=1$. Таким образом, мы установили рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения эквивалентности функций.

Разумеется, определение эквивалентности функций сохраняется и для односторонних пределов, и для пределов при стремлении к бесконечности.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ означает, что $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

В следующих задачах параметры α, β и другие, как правило, не равны нулю.

Примеры вычисления пределов

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}\sin x}{\lim\limits_{x\to 2} x} = \frac{\sin 2}{2}$, так как $\lim\limits_{x\to 2}\sin x = \sin 2$ и $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x\cos x} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, по теореме о пределе частного $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Таким образом, мы установили, что $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3}{3x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}$**.**

Обычное решение, вполне правильное: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3x\operatorname{tg}5x}{5x\ \sin 3x}\right) =$

$$= \frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{5\mathrm{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{5}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

Замечание. Обратим Ваше внимание на одну тонкость. В последних двух примерах мы вычисляли, например, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}$. При этом мы рассуждали так: обозначим $t = 5x$. Тогда наш предел примет вид $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}$ и мы заметили, что при $x \to 0$ также и $t \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$. При этом мы неявно использовали теорему о пределе сложной функции, гласящую:

Теорема. ***Пусть $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Пусть $g(y)$ определена в проколотой окрестности точки b и $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$.***

Пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. $\boldsymbol{\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)}$

2. Существует такая $\boldsymbol{\dot{U}(a)}$***, что*** $\boldsymbol{\forall x \in \dot{U}(a),\ f(x) \neq b}$***.***

Тогда существует $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} g(f(x))}$ ***и этот предел равен с.***

Вывод. Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 0$.

В частности, хорошо бы осознать и запомнить, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin px}{x} = p$, более того, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin px}{\sin qx} = \frac{p}{q}$.

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на αx и βx и перепишем дробь в виде, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha x}{\beta x}\right) == 1\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x\sin 5x}\right) =$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$.

Решение. Напомним, что по теореме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0$, только если $x\to 0$. А у нас в этой задаче $x\to\pi\neq 0$, поэтому для решения требуются дополнительные соображения. Например, замена переменной.
Сделаем замену переменной: $x-\pi = t$, тогда
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 5(t+\pi)}{\sin 4(t+\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(5t+5\pi)}{\sin(4t+4\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(5t+\pi)}{\sin(4t)} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{-\sin 5t}{\sin 4t}\right) = -\frac{5}{4}.$$

Здесь были использованы следующие свойства функций:

1) $\sin(5t+5\pi)=\sin(5t+\pi+4\pi)=\sin(5t+\pi)$ и $\sin(4t+4\pi)=\sin 4t$, так как эти функции ***периодичны с наименьшим периодом*** $\boldsymbol{2\pi}$.
2) $\sin(5t+\pi)=\sin 5t$, что можно получить по ***формулам приведения*** или по формулам сложения, например, так:
$\sin(5t+\pi)=\sin 5t\cos\pi+\cos 5t\sin\pi=\sin 5t\cdot(-1)+\cos 5t\cdot 0=$
$=-\sin 5t$.

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\left[\frac{0}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{0}{0}\right]\boxed{=}$

поэтому сделаем замену переменной: $x-\frac{\pi}{6}=t$, тогда $t\to 0$, и для переменной t получим такую задачу

$$\boxed{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\cos t\cos\frac{\pi}{6}-\sin t\sin\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin t\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos t)+\frac{1}{2}\sin t}\boxed{=}$$

так как $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$, то

$$\boxed{=}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}}\boxed{=}$$

так как $t\to 0$, то t находится в проколотой окрестности нуля, то есть $\sin\frac{t}{2}\neq 0$, и дробь можно сократить на $\sin\frac{t}{2}$, получим

$$\boxed{=}\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}=2.$$

Задача 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}\right)$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}\right)=\infty$. Поэтому мы получаем еще один вид неопределенности (то есть, если один множитель стремится к нулю, а другой к бесконечности, то произведение в разных ситуациях может стремится к какому-то числу, заранее неизвестному, или к бесконечности)

$$\lim_{x\to 1}\left((1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}\right)=[0\cdot\infty]\ \boxed{\equiv}$$

сделаем замену переменной: $x-1=t$, тогда $x=1+t$, и получим

$$\boxed{\equiv}\ \lim_{t\to 0}\left(-t\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\lim_{t\to 0}\left(-t\cdot\left(-\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right)=\lim_{t\to 0}\left(t\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{2}{\pi}}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\,.$$

Если кому-то сложно выполнять вычисления в таком виде, то можно сделать еще одну замену переменной: $\frac{\pi t}{2}=z$, поэтому $t=\frac{2z}{\pi}$. Тогда при $t\to 0$ переменная z тоже $z\to 0$, и для этой переменной получим задачу:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\frac{2z}{\pi}}{\sin z}\cdot\cos z\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos z\right)=1\cdot\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{2}{\pi}.$$

Важное замечание. Использование тригонометрических формул часто позволяет обойти замену переменной и сделать решение более коротким. Рассмотрим примеры.

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

Решение. В этой задаче мы также получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, так как $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$. Для решения тоже можно сделать замену переменной $x-\frac{\pi}{4}=t$. Но это приведет к более громоздким вычислениям. Поэтому воспользуемся формулой $\cos 2x=(\cos x)^2-(\sin x)^2$ и получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x)^2-(\sin x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

так как $(\cos x)^2 - (\sin x)^2 = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ и дробь можно сократить на $(\cos x - \sin x)$.

Задача 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}$.

Решение. В этой задаче мы также получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся формулой $\cos y - \cos z = 2\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$. В этом случае получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}{x\cdot x} =$$
$$= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}{x}\right) = 2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}.$$

Мы воспользовались уже известным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin px}{x} = p$.

Задача 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^3}{x\sin 2x}$.

Решение. В этой задаче мы также получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся формулой $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. В этом случае получим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^3}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)((\cos x)^2+1+\cos x+(\cos x)^2)}{x\sin 2x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}((\cos x)^2+\cos x+1)}{x\sin 2x} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin 2x}\cdot((\cos x)^2+\cos x+1)\right) =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{2}\cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

Мы воспользовались формулой $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ и уже известными пределами $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin px}{x} = p$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin px}{\sin qx} = \frac{p}{q}$.

Задача 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Воспользуемся приведённой выше теоремой о пределе сложной функции, положив $t = \arcsin x$. Из школьного курса известно, что это – возрастающая функция, поэтому при $x \neq 0$ имеем также $t \neq 0$. По определению арксинуса, $x = \sin t$. По вышеупомянутой теореме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$. Таким образом, $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.

Задача 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg} x}{x}$.

Решение. Воспользуемся приведённой выше теоремой о пределе сложной функции, положив $t = \mathrm{arctg} x$. Из школьного курса известно, что это – возрастающая функция, поэтому при $x \neq 0$ имеем также $t \neq 0$. (Свойства элементарных функций будут рассмотрены в дальнейшем). По определению арктангенса, $x = \mathrm{tg} t$. По вышеупомянутой теореме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg} x}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\mathrm{tg}\, t} = 1$. Таким образом, $\mathrm{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Приведённые примеры показывают, что $\sin x \sim \mathrm{tg} x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Пример. Известно, что $f(x) \sim g(x)$ и $h(x) \sim z(x)$ при $x \to a$. Верно ли, что $f(x)h(x) \sim g(x)z(x)$ и что $f(x) \pm h(x) \sim g(x) \pm z(x)$ при $x \to a$?

Ответ. Первое из этих утверждений верное, а второе – нет. В самом деле, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1, \lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{z(x)} = 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{h(x)}{z(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{z(x)} = 1$.

Для того, чтобы опровергнуть второе утверждение, следует привести контрпример. Пусть $f(x) = x, h(x) = x - x^3, g(x) = x, z(x) = x - x^2$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{z(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^3}{x-x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x} = 1$, но $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-h(x)}{g(x)-z(x)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Отсюда следует, что в произведениях мы можем смело заменять какие-то величины на эквивалентные им величины.

Задача 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x \cdot \mathrm{tg} 12x \cdot \mathrm{arctg} 2x}{60x^3}$.

Решение. По предыдущему примеру, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x \cdot \mathrm{tg} 12x \cdot \mathrm{arctg} 2x}{60x^3} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x \cdot 12x \cdot 2x}{60x^3} = 2$,
так как $\arcsin 5x \sim 5x$, $\mathrm{tg} 12x \sim 12x$, $\mathrm{arctg} 2x \sim 2x$.

Рассмотрим функцию $F(x) = (f(x))^{h(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{h(x)}$, где a – какое-то число, $a \in D_{F(x)}$, или $+\infty, -\infty$. Возможны следующие ситуации

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{h(x)} = A^B$.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}, A \neq 1, B = \pm\infty$. Задача решается легко.

3. Но когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A = 1$, $B = \pm\infty$ возникает ***неопределенность*** типа $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{h(x)} = [1^\infty]$. С ней помогает справиться следующая теорема

Теорема. ***Имеет место равенство*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$.

Замечание. Это равенство носит название ***второго замечательного предела.*** С его помощью будут вычислены производные показательной, логарифмической и степенной функции. Отметим, что как и в случае первого замечательного предела, применение для доказательства этой теоремы правила Лопиталя или формулы Тейлора приведёт к порочному логическому кругу.

Внимание! Далее приведем пример ***ошибочного рассуждения***:

поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, применим теорему о пределе произведения и получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ (!)

Ошибка в этом рассуждении состоит в том, что теорему о пределе произведения можно применять в случае, когда число сомножителей в этом произведении ограничено, а не растёт с ростом n.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Решение. Положим $t = \frac{1}{x}$. При $x \to +\infty$ имеем: $t \to +0$, $t \neq 0$, поэтому применима теорема о пределе сложной функции, согласно которой $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$.

Решение. Положим $t = 3x$. Если $x \to 0$, то $t \to 0, t \neq 0$. Тогда по теореме о пределе сложной функции получаем $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{6}{t}}$ и по теореме о пределе произведения получаем

$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{6}{t}} = \left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^6 = e^6$.

Вывод. Пусть $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$.

Поэтому в случае неопределенности $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{h(x)}=[1^\infty]$ полезны следующие преобразования:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{h(x)}=[1^\infty]=\lim_{x\to a}\Bigg(1+\underbrace{f(x)-1}_{=\varphi(x)\to 0}\Bigg)^{h(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}}(1+\varphi(x))^{h(x)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}}\left((1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)^{\varphi(x)\cdot h(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}}\underbrace{\left((1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)}_{\to e}{}^{\overbrace{\varphi(x)\cdot h(x)}^{\to A}}=e^A.$$

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right]=0$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$.

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-1-x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}\cdot x}.$$

В этом примере проделаны следующие рассуждения. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+1}=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}=e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2$. Поэтому получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}\cdot x}=e^{-2}.$$

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+3}\right)^{x^2+3x-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+3}\right)^{x^2+3x-2}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right)^{x^2+3x-2}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-1-x^2-3}{x^2+3}\right)^{x^2+3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{x^2+1}\right)^{x^2+3x-2}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{x^2+1}\cdot(x^2+3x-2)} = e^{-4},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-4}} = e$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4(x^2+3x-2)}{x^2+1} = -4.$

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x-3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x-3} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)^{x-3} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1-(x^2-4x+2)}{x^2-4x+2}\right)^{x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1)}{x^2-4x+2}\right)^{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\cdot(x-3)} = e^2,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}} = e$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)(x-3)}{x^2-4x+2} = 2.$

Задача 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)).$

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2x+1}{x+2}\right) =$

$$= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln 2.$$

Здесь мы воспользовались двумя фактами:

1) При $x\to+\infty$ выражения $(2x+1)>0$ и $(x+2)>0$, поэтому выполняется тождественное равенство $\ln(2x+1)-\ln(x+2) = \ln\frac{2x+1}{x+2}$.
2) Функция $\ln t$ непрерывна при $t>0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2} = 2$, поэтому будет верно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}\right)$.

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1+x}{1-x}-1\right)^{\frac{1}{2x}}=$

$=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right)^{\frac{1}{1-x}}=\ln e^{1}=1.$

Здесь мы воспользовались следующими фактами:

1) При $x\to 0$ в этом случае множитель перед логарифмом можно внести в степень подлогарифмического выражения:

   $\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

2) Существует предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e$

3) Функция $\ln t$ непрерывна при $t>0$ и существует конечный предел $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$, поэтому будет верно, что

   $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.