МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(для бакалавриата)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов бакалавриата химического факультета

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления производных явно заданных функций, неявно заданных функций, параметрически заданных функций, показательно-степенных функций. Рассмотрены примеры для вычисления производных произвольного порядка (метод математической индукции) и применение формулы Лейбница.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Очень важно научиться вычислять производную функции. Конечно, первое, что нужно сделать, – это выучить табличные производные (их значения выводят на лекции).

Таблица производных

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности, $(C)' = 0$, если C – константа, $(x)' = 1$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ и $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ (эти частные случаи лучше постараться запомнить, потому что они очень часто встречаются в задачах, и подробное их вычисление будет очень утомительно)
2) $(\sin x)' = \cos x$
3) $(\cos x)' = -\sin x$
4) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6) $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$
7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

В последних двух строчках записаны производные «гиперболических» функций: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – ***гиперболический синус*** и $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – ***гиперболический косинус***.

Свойства производной

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции, C – константа, тогда

1) $(Cf(x))' = Cf'(x)$, то есть постоянный множитель можно вынести из-под знака производной (за скобку)
2) $(f \pm g)' = f' \pm g'$, то есть производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных этих функций
3) $(fg)' = f'g + fg'$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5) Производная сложной функции: пусть $y = f(x)$ и $z = g(y)$ дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $z(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x и

$$z'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x),$$

здесь (внимание!), чтобы вычислить производную функции $g'\big(f(x)\big)$, надо вычислить $(g(y))'_y$ и после вычисления в результат подставить $f(x)$ вместо y, что можно записать и так: $g(f(x))'_{f(x)}$.

Очень полезно привыкать к фразе: «производная функции какого-то аргумента по этому аргументу…».

Примеры.

При вычислении производной функции надо стараться записать результат в виде, максимально удобном для дальнейшего применения.

1) $(3x^2 - 5x + 1)' = (3x^2)' + (-5x)' + (1)' = 3(x^2)' - 5(x)' + 0 =$ $= 6x - 5.$

2) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} + 0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

здесь производная $\left(\sqrt{2}\right)' = 0$, так как $\sqrt{2}$ – константа.

3) $\left(\sqrt{x}\left(x^3-\sqrt{x}+1\right)\right)' \boxed{=}$

Заметим, что вычисление производной произведения гораздо сложнее, чем вычисление производной суммы. Поэтому, если произведение можно записать как сумму «хороших» слагаемых, это обязательно надо сделать. В данном случае

$\boxed{=} \left(x^{\frac{7}{2}} - x + \sqrt{x}\right)' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $\left(\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\right)' \boxed{=}$

вновь перемножим выражения $\left(\sqrt{x}+1\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$, получим

$\boxed{=} \left(1-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)' = \left(-\sqrt{x}+x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} =$
$= -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

5) $\left(\frac{t^2-5t-1}{t^3}\right)' \boxed{=}$

Заметим, что вычисление производной дроби гораздо сложнее, чем вычисление производной суммы. Поэтому, если дробь можно записать как сумму «хороших» слагаемых, это обязательно надо сделать. Соответствующее преобразование называется ***«почленно поделить»***, то есть каждое слагаемое в числителе поделить на знаменатель. В данном случае $\left(\text{напомним, что } \frac{t^\alpha}{t^\beta} = t^{\alpha-\beta}\right)$ получим

$\boxed{=} (t^{-1} - 5t^{-2} - t^{-3})' = -t^{-2} - 5(-2)t^{-3} - (-)3t^{-4} =$
$= -t^{-2} + 10t^{-3} + 3t^{-4} = -\frac{1}{t^2} + 10\frac{1}{t^3} + 3\frac{1}{t^4} = \frac{-t^2+10t+3}{t^4}$.

6) $(\sin x + 2\cos x + 5\sin 3)' = (\sin x)' + (2\cos x)' + (5\sin 3)' =$
$= \cos x - 2\sin x + 0 = \cos x - 2\sin x$,

здесь производная $(5\sin 3)' = 0$, так как $5\sin 3$ – константа.

Вычисление производной сложной функции является непростой задачей. Сначала сложную функцию надо записать так, чтобы хорошо был виден порядок вычисления составляющих ее функций. Например, запись $\left(\underbrace{\sin \underbrace{3x}}\right)$

означает, что мы сначала вычисляем $3x$, а затем уже вычисляем $\sin \underbrace{3x}$. При вычислении производной мы сначала берем производную функции $\sin \underbrace{3x}$ по переменной $3x$, а затем умножаем ее на производную функции $3x$ по переменной x. Записывается это так, как сделано в следующих примерах.

7) $\left(\underbrace{\sin \underbrace{3x}}\right)' = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$.

8) $\left(\underbrace{\operatorname{tg} \underbrace{5x}}\right)' = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = \frac{5}{\cos^2 5x}$.

9) $(\cos^3 x)' = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\cos x}\right)^3}\right)' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x$.

10) $(\sin^5 2x)' = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\sin \underbrace{2x}}\right)^5}\right)' = 5\sin^4 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 =$
$= 10\sin^4 2x \cdot \cos 2x$.

11) $\left(\sin \frac{1}{x}\right)' = \left(\underbrace{\sin \underbrace{\frac{1}{x}}}\right)' = \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}$.

12) $(\ln 5x)' = \left(\underbrace{\ln \underbrace{5x}}\right)' = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$.

Полученный результат кажется удивительным. Действительно, $(\ln 5x)' = \frac{1}{x}$, но и $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Как же так? Но все становится совсем ясным, если вспомнить свойство логарифма: $\ln 5x = \ln 5 + \ln x$ (логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей, если эти множители положительны). Тогда
$(\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = (\ln 5)' + (\ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, где производная константы $\ln 5$, конечно, равна нулю.

13) $(\ln \sin 3x)' = \left(\underbrace{\ln \underbrace{\sin \underbrace{3x}}}\right)' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3\operatorname{ctg} 3x$.

14) $(\ln^7(x^2 - 3x))' = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\ln \underbrace{(x^2 - 3x)}}\right)^7}\right)' =$
$= 7\ln^6(x^2 - 3x) \cdot \frac{1}{x^2-3x} \cdot (2x - 3) = 7\ln^6(x^2 - 3x) \cdot \frac{2x-3}{x^2-3x}$.

15) $\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)' = \frac{(e^x)'\sin x - e^x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x}$.

16) $(e^{3x}\sin 5x)' = (e^{3x})'\sin 5x + e^{3x}(\sin 5x)' =$
$= e^{3x}\cdot 3\cdot \sin 5x + e^{3x}\cdot \cos 5x \cdot 5 = e^{3x}(3\sin 5x + 5\cos 5x).$

17) $(\sin 4x \cdot \operatorname{sh} 3x)' = \cos 4x \cdot 4 \cdot \operatorname{sh} 3x + \sin 4x \cdot \operatorname{ch} 3x \cdot 3 =$
$= 4\cos 4x \cdot \operatorname{sh} 3x + 3\sin 4x \cdot \operatorname{ch} 3x.$

18) $(\operatorname{arctg}^3 7x)' = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\operatorname{arctg} \underbrace{7x}}\right)^3}\right)' = 3\operatorname{arctg}^2 7x \cdot \frac{1}{1+(7x)^2}\cdot 7 =$
$= \operatorname{arctg}^2 7x \cdot \frac{21}{1+49x^2}$.

19) $\left((x^6 - x)\operatorname{tg} 4x\right)' = (6x^5 - 1)\cdot \operatorname{tg} 4x + (x^6 - x)\cdot \frac{4}{\cos^2 4x}$.

20) $(\arcsin^3 5x)' = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\arcsin \underbrace{5x}}\right)^3}\right)' = 3\arcsin^2 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot 5 =$
$= \arcsin^2 5x \cdot \frac{15}{\sqrt{1-25x^2}}$.

21) $\left(\ln^4\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}\right)\right)' = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\ln \underbrace{\operatorname{arctg}\underbrace{\sqrt{\underbrace{x^2-9}}}}}\right)^4}\right)' =$
$= 4\ln^3\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}\right)\cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}}\cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2}\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-9}}\cdot 2x =$
$= 4\ln^3\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}\right)\cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}}\cdot \frac{1}{1+x^2-9}\cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} =$
$= 4\ln^3\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}\right)\cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}}\cdot \frac{1}{x^2-8}\cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

Замечание. Если производная дифференцируемой функции $f(x)$ снова является дифференцируемой функцией, то у нее снова можно взять производную. Получим функцию $\left(f_x'(x)\right)_x' = f_{xx}''(x) = f_{x^2}''(x)$. Затем, бывает можно взять третью производную и так далее…

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически, то есть заданы функции

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in (\alpha; \beta). \end{cases}$$

Такая функция в каждый «момент времени» t_0 задает пару чисел (x_0, y_0), где $x_0 = x(t_0)$ и $y_0 = y(t_0)$, которые являются координатами точки на плоскости Oxy. Поэтому при всех $t \in (\alpha; \beta)$ получается множество точек, которые задают кривую на плоскости Oxy. Координаты точек этой кривой имеют вид $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$. Предположим, что множество значений переменной t можно разбить на части, в каждой из которых соответствующая часть кривой будет являться графиком функции $y = y(x)$ или $x = x(y)$. К сожалению, эту зависимость чаще всего в явном виде записать невозможно. Но посчитать производную y'_x в каждый момент времени t_0, то есть в каждой точке (x_0, y_0) можно. При этом (обратите внимание!) y'_x будет функцией аргумента t.

Теорема. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ – дважды дифференцируемые функции и $x'_t(t) \neq 0$, то

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \quad \text{и} \quad y''_{xx}(t) = \frac{\big(y'_x(t)\big)'_t}{x'_t(t)} = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\big(x'_t(t)\big)^3}.$$

Из теоремы следует, что для вычисления $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ потребуется вычислить $x'_t(t)$, $y'_t(t)$, $x''_{tt}(t)$, $y''_{tt}(t)$.

Задача 1. Вычислить $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t), a > 0. \end{cases}$

Найти $y'_x(\pi)$ и $y''_{xx}(\pi)$.

Решение. Вычислим сначала производные $x'_t(t)$, $y'_t(t)$, $x''_{tt}(t)$, $y''_{tt}(t)$.

$x'_t(t) = a(1 - \cos t)$

$x''_{tt}(t) = a \sin t$

$y'_t(t) = a \sin t$

$y''_{tt}(t) = a \cos t.$

Тогда

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \boxed{=}$$

воспользуемся формулой $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ и сократим полученную дробь (поделим числитель и знаменатель дроби) на $\sin\frac{t}{2}$, получим

$$\boxed{=} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{a\cos t\cdot a(1-\cos t) - a\sin t\cdot a\sin t}{(a(1-\cos t))^3} = \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{a(1-\cos t)^3} =$$
$$= \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = \frac{-(1-\cos t)}{a(1-\cos t)^3} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

так как $(1-\cos t)^2 = \left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 = 4\sin^4\frac{t}{2}$ и выполняется ***основное тригонометрическое тождество*** $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$.

В этой задаче $t_0 = \pi$.

$$y'_x(\pi) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}(\pi) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$$

$$y''_{xx}(\pi) = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}(\pi) = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4a} < 0 \quad \text{при } a > 0.$$

Заметим, что при $t_0 = \pi$ координаты соответствующей точки плоскости будут иметь вид:

$$x_0 = x(\pi) = a(\pi - \sin\pi) = a\pi,$$
$$y_0 = y(\pi) = a\big((1-\cos\pi)\big) = a\big(1-(-1)\big) = 2a.$$

Так как $y'_x(\pi) = 0$ и $y''_{xx}(\pi) < 0$ при $a > 0$, то параметрически заданная функция $y = y(x)$ при $t_0 = \pi$ (то есть в точке $M_0(\pi a; 2a)$ плоскости Oxy) имеет локальный максимум.

Ответ: $y'_x(t) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$; $y''_{xx}(t) = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; $y'_x(\pi) = 0$; $y''_{xx}(\pi) = -\frac{1}{4a}$.

Задача 2. Вычислить $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\sin t \\ y(t) = e^{-t}\cos t. \end{cases}$

Найти значения производных при $t = 0$.

Решение. Вычислим сначала производные $x'_t(t)$, $y'_t(t)$, $x''_{tt}(t)$, $y''_{tt}(t)$.

$$x'_t(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$x''_{tt}(t) = -e^{-t}(\cos t - \sin t) + e^{-t}(-\sin t - \cos t) = -2e^{-t}\cos t$$

$y'_t(t) = -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$

$y''_{tt}(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) - e^{-t}(-\sin t + \cos t) = 2e^{-t}\sin t$

Тогда

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-e^{-t}(\cos t+\sin t)}{e^{-t}(\cos t-\sin t)} = \frac{\sin t+\cos t}{\sin t-\cos t}$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{2e^{-t}\sin t\cdot e^{-t}(\cos t-\sin t)+e^{-t}(\cos t+\sin t)\cdot\left(-2e^{-t}\cos t\right)}{\left(e^{-t}(\cos t-\sin t)\right)^3} =$$

Сократим дробь на e^{-2t}, получим

$$= 2\cdot\frac{\sin t\cos t-\sin^2 t-\cos^2 t-\sin t\cos t}{e^{-t}(\cos t-\sin t)^3} = -\frac{2}{e^{-t}(\cos t-\sin t)^3}\,.$$

$$y'_x(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1,\ \ y''_{xx}(0) = \frac{-2}{1\cdot(1-0)^3} = -2$$

Ответ: $y'_x(t) = \frac{\sin t+\cos t}{\sin t-\cos t}$; $\quad y''_{xx}(t) = -\frac{2}{e^{-t}(\cos t-\sin t)^3}$.

$y'_x(0) = -1,\ \ y''_{xx}(0) = -2.$

Задача 3. Вычислить $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = e^t(\cos t + \sin t) \\ y(t) = e^t(\cos t - \sin t). \end{cases}$

Решение. Вычислим сначала производные $x'_t(t),\ y'_t(t),\ x''_{tt}(t),\ y''_{tt}(t)$.

$x'_t(t) = e^t(\cos t + \sin t) + e^t(-\sin t + \cos t) = 2e^t\cos t$

$x''_{tt}(t) = 2e^t\cos t - 2e^t\sin t = 2e^t(\cos t - \sin t)$

$y'_t(t) = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t\sin t$

$y''_{tt}(t) = -2e^t\sin t - 2e^t\cos t = -2e^t(\cos t + \sin t)$

Тогда

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-2e^t\sin t}{2e^t\cos t} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{-2e^t(\cos t+\sin t)\cdot 2e^t\cos t+2e^t\sin t\cdot 2e^t(\cos t-\sin t)}{(2e^t\cos t)^3} =$$

$$= \frac{-\cos^2 t-\sin t\cos t+\sin t\cos t-\sin^2 t}{2e^t\cos^3 t} = -\frac{1}{2e^t\cos^3 t}\,.$$

Ответ: $y'_x(t) = -\operatorname{tg} t$; $\quad y''_{xx}(t) = -\frac{1}{2e^t\cos^3 t}$.

Задача 4. Вычислить $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t \operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{1+t^2}. \end{cases}$

Решение. Вычислим сначала производные $x'_t(t),\ y'_t(t),\ x''_{tt}(t),\ y''_{tt}(t)$.

$x'_t(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 + 1)$

$x''_{tt}(t) = 6t$

$y'_t(t) = \operatorname{arctg} t + t \cdot \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot 2t = \operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t$

$y''_{tt}(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Тогда

$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{\operatorname{arctg} t}{3(t^2+1)}$

$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{\frac{1}{1+t^2}\cdot 3(t^2+1) - \operatorname{arctg} t \cdot 6t}{\left(3(t^2+1)\right)^3} = \frac{3 - \operatorname{arctg} t \cdot 6t}{27(t^2+1)^3} = \frac{1 - 2t \operatorname{arctg} t}{9(t^2+1)^3}.$

Ответ: $y'_x(t) = \frac{\operatorname{arctg} t}{3(t^2+1)}$; $y''_{xx}(t) = \frac{1-2t\operatorname{arctg} t}{9(t^2+1)^3}$.

Производная неявно заданной функции

Если задано уравнение $F(x, y) = 0$, то говорят, что функция $y = y(x)$ задана неявно этим уравнением. Предположим, что такая функция существует и является дифференцируемой. Чтобы найти производную $y'_x(x)$, запишем исходное уравнение в виде $F(x, y(x)) = 0$ и вычислим производную ***сложной функции***. Получим уравнение, линейное относительно y'_x и решим это уравнение.

Пример. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат. В явном виде невозможно с помощью одной функции $y = y(x)$ задать всю кривую (окружность). Можно задать отдельно верхнюю полуокружность, как $y = y_{\text{в}} = \sqrt{1 - x^2}$, и нижнюю полуокружность, как $y = y_{\text{н}} = -\sqrt{1 - x^2}$. Затем у каждой функции взять производную:

$y_{\text{в}}' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$ при $y \neq 0$, то есть при $x \neq \pm 1$.

$y_н{}' = \left(-\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{y}$ при $y \neq 0$, то есть при $x \neq \pm 1$.

Заметим, что в этом случае производная y'_x является функцией ***точки плоскости***, то есть $y'_x = y'_x(x, y)$.

Но можно поступить по-другому. Запишем уравнение окружности в виде $F(x, y(x)) = 0$, то есть в данном случае в виде $x^2 + (y(x))^2 - 1 = 0$. Продифференцируем это уравнение по переменной x, получим

$2x + 2y(x) \cdot y'_x = 0$, откуда найдем, что

$y'_x = \frac{-x}{y}$ при $y \neq 0$, то есть при $x \neq \pm 1$.

Заметим, что, во-первых, второе решение короче. А во-вторых, довольно часто бывает так, что если функция $y = y(x)$ задана неявно, то ее невозможно выразить в явном виде. Поэтому надо освоить второе решение.

Задача 1. Пусть функция $y(x)$ задана в виде $x + y = e^{x-y}$. Найти производные y'_x и y''_{xx}.

Решение. В уравнение $x + y = e^{x-y}$ вместо y поставим $y(x)$, чтобы хорошо было видно, что y – это функция аргумента x, получим

$x + y(x) = e^{x-y(x)}$.

Продифференцируем равенство по x:

$1 + y'_x = e^{x-y}(1 - y'_x)$ (напомним, что $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$).

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$1 + y'_x = e^{x-y} - e^{x-y} y'_x$

$y'_x(1 + e^{x-y}) = e^{x-y} - 1$

$y'_x = \frac{e^{x-y}-1}{1+e^{x-y}}$.

Но по условию $e^{x-y} = x + y$, поэтому производную y'_x можно записать в более простом виде:

$y'_x = y'_x(x, y) = \frac{x+y-1}{x+y+1}$.

Чтобы найти вторую производную y''_{xx}, надо продифференцировать последнее равенство. Производная дроби $\frac{x+y-1}{x+y+1}$ по переменной x считается так же, как мы раньше считали производную дроби:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{x+y-1}{x+y+1}\right)'_x = \left(\frac{x+y(x)-1}{x+y(x)+1}\right)'_x =$$

$$=\frac{(x+y(x)-1)'_x(x+y+1)-(x+y-1)(x+y(x)+1)'_x}{(x+y+1)^2} =$$

$$= \frac{(1+y'_x)(x+y+1)-(x+y-1)(1+y'_x)}{(x+y+1)^2} = \frac{(1+y'_x)(x+y+1-x-y+1)}{(x+y+1)^2} = 2\cdot\frac{(1+y'_x)}{(x+y+1)^2}\ \boxed{\equiv}$$

Заметим, что в полученном выражении содержатся три величины x, y и y'_x. Но производная y''_{xx} является функцией (x, y), поэтому нужно вместо y'_x в это равенство подставить $y'_x = \frac{x+y-1}{x+y+1}$, получим

$$\boxed{\equiv}\ 2\cdot\frac{\left(1+\frac{x+y-1}{x+y+1}\right)}{(x+y+1)^2} = 2\cdot\frac{(x+y+1+x+y-1)}{(x+y+1)^3} = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}.$$

Еще раз отметим, что производные $y'_x = y'_x(x,y)$ и $y''_{xx} = y''_{xx}(x,y)$ являются функциями «точки на плоскости».

Ответ: $y'_x(x,y) = \frac{x+y-1}{x+y+1}$; $y''_{xx}(x,y) = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$.

Замечание. Из этого примера видно, что действительно при дифференцировании полезно вместо y писать $y(x)$, чтобы не забыть, что y является функцией аргумента x. Но в дальнейшем (в результате) вместо $y(x)$ надо писать y.

Задача 2. Пусть функция $y(x)$ задана уравнением $x^2 - 1 + \cos xy = 0$. Найти производные y'_x и y''_{xx}.

Решение. В уравнение $x^2 - 1 + \cos xy = 0$ вместо y поставим $y(x)$, чтобы хорошо было видно, что y – это функция аргумента x, получим

$$x^2 - 1 + \cos(xy(x)) = 0 .$$

Продифференцируем равенство по x:

$$2x - \sin(xy)\,(1\cdot y + x\cdot y'_x) = 0 .$$

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$2x - y\sin(xy) - xy'_x\sin(xy) = 0$

$xy'_x\sin xy = 2x - y\sin xy$

$y'_x = \frac{2x - y\sin xy}{x\sin xy}$.

Чтобы посчитать y''_{xx}, надо продифференцировать равенство $y'_x = \frac{2x-y\sin xy}{x\sin xy}$, записав его максимально «красиво» для дифференцирования. Перепишем y'_x в виде (почленно поделив):

$y'_x = \frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}$

$y'_x(x) = \frac{2}{\sin xy(x)} - \frac{y\,(x)}{x}$.

Далее,

$$y''_{xx} = \frac{-2\cdot\cos xy\cdot(y + x\cdot y'_x)}{\sin^2 xy} - \frac{y'_x\cdot x - y}{x^2} \boxed{=}$$

В это равенство вместо y'_x подставим ее выражение через (x, y), то есть $\frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}$, получим

$$\boxed{=} \frac{-2\cdot\cos xy\cdot\left(y + x\cdot\left(\frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}\right)\right)}{\sin^2 xy} - \frac{\left(\frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}\right)\cdot x - y}{x^2} =$$

$$= \frac{-2\cdot\cos xy\cdot\left(y + \frac{2x}{\sin xy} - y\right)}{\sin^2 xy} - \frac{\frac{2x}{\sin xy} - y - y}{x^2} = \frac{-2\cdot\cos xy\cdot\left(\frac{2x}{\sin xy}\right)}{\sin^2 xy} - \frac{\frac{2x}{\sin xy} - 2y}{x^2} =$$

$$= \frac{-4x\cos xy}{\sin^3 xy} - \frac{2x - 2y\sin xy}{x^2\sin xy} = \frac{2(y\sin xy - x)}{x^2\sin xy} - \frac{-4x\cos xy}{\sin^3 xy}.$$

Ответ: $y'_x(x, y) = \frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}$; $y''_{xx}(x, y) = \frac{2(y\sin xy - x)}{x^2\sin xy} - \frac{-4x\cos xy}{\sin^3 xy}$.

Задача 3. Пусть функция $y(x)$ задана уравнением $x^3 + 4y^3 - 3yx^2 = 0$. Найти производные y'_x и y''_{xx}.

Решение.

$x^3 + 4y^3(x) - 3y(x)x^2 = 0$.

Продифференцируем равенство по x:

$3x^2 + 4\cdot 3y^2y'_x - 3y'_xx^2 - 3y\cdot 2x = 0$.

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$y'_x(12y^2 - 3x^2) = 6xy - 3x^2$

$y'_x = \frac{6xy-3x^2}{12y^2-3x^2} = \frac{x}{2y+x}$.

Чтобы найти вторую производную y''_{xx}, надо продифференцировать последнее равенство.

$$y''_{xx} = \left(\frac{x}{2y+x}\right)'_x = \left(\frac{x}{2y(x)+x}\right)'_x = \frac{1\cdot(2y+x)-x\cdot(2y'_x+1)}{(2y+x)^2} = \frac{2y+x-x\cdot\left(2\cdot\frac{x}{2y+x}+1\right)}{(2y+x)^2} =$$
$$= \frac{2y+x-x\cdot\left(2\cdot\frac{x}{2y+x}+1\right)}{(2y+x)^2} = \frac{2y+x-2x\cdot\frac{x}{2y+x}-x}{(2y+x)^2} = \frac{2y-2x\cdot\frac{x}{2y+x}}{(2y+x)^2} = \frac{2y(2y+x)-2x^2}{(2y+x)^2} = \frac{4y^2+2xy-2x^2}{(2y+x)^2}.$$

Ответ: $y'_x(x,y) = \frac{x}{2y+x}$; $y''_{xx}(x,y) = \frac{4y^2+2xy-2x^2}{(2y+x)^2}$.

Задача 4. Пусть функция $y(x)$ задана в виде $2y = 1 + xy^3$. Найти производные $y'_x(M)$ и $y''_{xx}(M)$ в точке $M(1;1)$.

Решение.

$2y(x) = 1 + xy^3(x)$.

Продифференцируем равенство по x:

$2y'_x = 1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y'_x$.

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$y'_x(2 - 3xy^2) = y^3$

$y'_x = \frac{y^3}{2-3xy^2}$.

Следовательно,

$y'_x(M) = \frac{1}{2-3} = -1$.

Чтобы найти вторую производную y''_{xx}, надо продифференцировать равенство $y'_x = \frac{y^3}{2-3xy^2}$.

$$y''_{xx} = \left(\frac{y^3}{2-3xy^2}\right)'_x = \left(\frac{y^3(x)}{2-3xy^2(x)}\right)'_x = \frac{3y^2y'_x(2-3xy^2)-y^3(-3y^2-3\cdot 2yy'_x)}{(2-3xy^2)^2}.$$

Заметим, что для вычисления $y''_{xx}(M)$ достаточно в последнее равенство, не упрощая его (то есть, не подставляя значение $y'_x = \frac{y^3}{2-3xy^2}$), подставить координаты точки M и значение $y'_x(M)$:

$$y''_{xx}(M) = \frac{3\cdot1\cdot(-1)\cdot(2-3\cdot1\cdot1)-1\cdot(-3-6\cdot1\cdot(-1)}{(2-3\cdot1\cdot1)^2} = \frac{3-3}{1} = 0.$$

Ответ: $y'_x(M) = y'_x(1;1) = -1;\quad y''_{xx}(M) = y''_{xx}(1;1) = 0.$

Производная показательно-степенной функции

Функция $y = \left(f(x)\right)^{h(x)}$ называется ***показательно-степенной***. Напомним, что поскольку эта функция является показательной, то область ее определения задается условием $f(x) > 0$. При этом сама функция также будет принимать только положительные значения.

Производную показательно-степенной функции можно считать двумя способами.

1-й способ.

$$\left(\left(f(x)\right)^{h(x)}\right)' = \left(e^{\ln\left(f(x)\right)^{h(x)}}\right)' = \left(e^{h(x)\ln f(x)}\right)' =$$
$$= e^{h(x)\ln f(x)}\cdot\left(h(x)\ln f(x)\right)' = \left(f(x)\right)^{h(x)}\left(h'(x)\cdot\ln f(x) + h(x)\cdot\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что функции $y = e^x$ и $y = \ln x$ являются взаимно обратными и для них выполняется соотношение $x = e^{\ln x}$, которое в данном случае выглядит как $\left(f(x)\right)^{h(x)} = e^{\ln\left(f(x)\right)^{h(x)}}$.

2-й способ (логарифмическая производная).

Так как функция $y = \left(f(x)\right)^{h(x)}$ принимает положительные значения, то равенство $y = \left(f(x)\right)^{h(x)}$ можно прологарифмировать:

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{h(x)}$$

$$\ln y(x) = h(x)\ln f(x),$$

так как степень можно вынести из-под знака логарифма (то есть выполняется равенство $\ln u^v = v\ln u$ при $u > 0$).

Мы получили функцию, заданную неявно. Найдем ее производную. В правой части стоит производная произведения, поэтому

$$\frac{1}{y}\cdot y'(x) = \left(h'(x)\cdot\ln f(x) + h(x)\cdot\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right)$$

$$y'(x) = y \cdot \left(h'(x) \cdot \ln f(x) + h(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$$y'(x) = \left(f(x) \right)^{h(x)} \cdot \left(h'(x) \cdot \ln f(x) + h(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

В дальнейшем мы чаще будем использовать второй способ.

Задача 1. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение.

1-й способ.

$$(x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$
$$= x^x(\ln x + 1).$$

2-й способ (логарифмическая производная)

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

$\ln y(x) = x \ln x$

$(\ln y(x))' = (x \ln x\ )'$

$\frac{1}{y} \cdot y'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$y'(x) = y \cdot (\ln x + 1)$

$y'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

Ответ: $y'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

Задача 2. Найти производную функции $y = (\sin x)^x$.

Решение.

1-й способ.

$$((\sin x)^x)' = \left(e^{\ln(\sin x)^x}\right)' = \left(e^{x \ln \sin x}\right)' = e^{x \ln \sin x}(x \ln \sin x)' =$$
$$= e^{x \ln \sin x}\left(1 \cdot \ln \sin x + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) =$$
$$= (\sin x)^x(\ln \sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

2-й способ (логарифмическая производная)

$\ln y = \ln(\sin x)^x$

$\ln y(x) = x \ln(\sin x)$

$(\ln y(x))' = (x \ln(\sin x)\ )'$

$\frac{1}{y} \cdot y'(x) = 1 \cdot \ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

$y'(x) = y \cdot (\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x)$

$y'(x) = x^x \cdot (\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

Ответ: $y'(x) = (\sin x)^x \cdot (\ln(\sin x) + x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

Задача 3. Найти производную функции $y = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$.

Решение.

1-й способ.

$$((\operatorname{arctg} x)^{\cos x})' = \left(e^{\ln(\operatorname{arctg} x)^{\cos x}}\right)' = \left(e^{\cos x \ln \operatorname{arctg} x}\right)' =$$
$$= e^{\cos x \ln \operatorname{arctg} x}(\cos x \ln \operatorname{arctg} x)' =$$
$$= \left(-\sin x \cdot \ln \operatorname{arctg} x + \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right) =$$
$$= (\operatorname{arctg} x)^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln \operatorname{arctg} x + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right).$$

2-й способ (логарифмическая производная)

$\ln y = \ln(\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$

$\ln y(x) = \cos x \ln(\operatorname{arctg} x)$

$(\ln y(x))' = (\cos x \ln(\operatorname{arctg} x)\ )'$

$\frac{1}{y} \cdot y'(x) = -\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$y'(x) = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$

$y'(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$.

Ответ: $y'(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$.

Производная n-го порядка. Метод математической индукции

Метод математической индукции. Пусть задано высказывание $F(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Надо доказать, что это высказывание верно $\forall n \in \mathbb{N}$ (или $\forall n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого).

Замечание. Выражение «Пусть задано высказывание $F(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$» означает, что задано бесконечно много высказываний, каждое из которых получается при каждом значении $n \in \mathbb{N}$.

Примеры. Приведем примеры высказываний.

1) Высказывание $F(n)$ такое: при каждом $n \in \mathbb{N}$ производная функции $y(x) = e^{3x}$ равна $y^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.
2) Высказывание $F(n)$ такое: при каждом $n \in \mathbb{N}$ выражение $n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n$ делится на 120.

Заметим, даже если мы проверим, что эти утверждения верны при значениях $n = 1,2,3,\dots 100$ (проделаем огромную работу!), то это вовсе не будет означать, что утверждение верно при всех остальных n. Так как же понять (и доказать!), что эти утверждения будут ***верны при каждом значении*** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, то есть при $n > 100$ не встретится хотя бы одно натуральное число n_1, такое, что высказывание $F(n_1)$ окажется неверным?

Для этого проделаем следующее:

1) ***Проверим***, что высказывание $F(n)$ верно при $n = 1$ (или другом $n = n_0$) – база индукции.

2) ***Предположим***, что высказывание верно при $n = k \geq n_0$.

3) ***Докажем***, что тогда высказывание верно при $n = k + 1$.

Задача 1. Найти $(\sin x)^{(n)}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Решение.

Заметим, что

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$$

$(\sin x)''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right)$

$(\sin x)^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right)$.

Проделав эту работу, мы ***можем предположить***, что
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$. Но почему это будет верно при $\forall n \in \mathbb{N}$?

Докажем, что это будет ***верно при*** $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

1) *Проверим*, что формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ верна при $n = 1$. Действительно,

$(\sin x)^{(1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 1\right)$, то есть
$(\sin x)' = \cos x$ – верно.

Обратите внимание, что в первой строчке стоит значение формулы $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ при $n = 1$, а во второй – то, что мы получили в самом начале, вычисляя первые производные функции $\sin x$. Именно это доказывает, что формула верна при $n = 1$.

2) *Предположим*, что формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ верна при $n = k$, то есть

$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot k\right)$.

3) *Докажем*, что тогда формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ верна при $n = k + 1$.

Действительно, так как $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$, то

$$(\sin x)^{(k+1)} = \left((\sin x)^{(k)}\right)^{(1)} = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot k\right)\right)^{(1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot k + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot (k+1)\right).$$

Мы получили, что $(\sin x)^{(k+1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot (k+1)\right)$, а это означает, что формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ верна при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Найти $(\ln x)^{(n)}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Решение.

Заметим, что

$(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$(\ln x)'' = ((\ln x)')' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2}$

$(\ln x)''' = ((\ln x)'')' = (-1 \cdot x^{-2})' = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$

$(\ln x)^{(4)} = ((\ln x)''')' = ((-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^{-3})' = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} =$
$= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}.$

Возникает предположение, что $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$. Докажем, что оно верно.

1) *Проверим*, что формула $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ верна при $n = 1$. Действительно,

$(\ln x)^{(1)} = (-1)^0 \cdot (0)! \cdot x^{-1}$, то есть
$(\ln x)' = x^{-1}$ – а это верно.

Обратите внимание, что в первой строчке стоит значение формулы $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ при $n = 1$, а во второй – то, что мы получили в самом начале, вычисляя первые производные функции $\ln x$. Именно это доказывает, что формула верна при $n = 1$.

2) *Предположим*, что формула $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ верна при $n = k$, то есть, что верно равенство
$(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k}$.

3) *Докажем*, что тогда формула $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ верна при $n = k + 1$.

Действительно, так как $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$, то

$(\ln x)^{(k+1)} = \left((\ln x)^{(k)}\right)^{(1)} = ((-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k})^{(1)} =$
$= (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-k) \cdot x^{-k-1} = (-1)^k \cdot (k)! \cdot x^{-k-1} =$
$= (-1)^{(k+1)-1} \cdot ((k+1)-1)! \cdot x^{-(k+1)}.$

Получили, что $(\ln x)^{(k+1)} = (-1)^{(k+1)-1} \cdot ((k+1)-1)! \cdot x^{-(k+1)}$, а это ровно то, что получится, если в формулу $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ вместо n поставить $k+1$. Это означает, что формула верна при $n = k+1$.

Следовательно, формула верна при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Найти $(e^{ax})^{(n)}$, $a \neq 0$.

Решение.

Заметим, что

$(e^{ax})' = ae^{ax}$

$(e^{ax})'' = a \cdot ae^{ax} = a^2 e^{ax}$

$(e^{ax})''' = a \cdot a^2 e^{ax} = a^3 e^{ax}$.

Возникает предположение, что $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$. Докажем, что это верно.

1) *<u>Проверим</u>*, что формула $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ верна при $n = 1$. Действительно,

$(e^{ax})^{(1)} = a^1 \cdot e^{ax}$

$(e^{ax})' = ae^{ax}$ – верно.

Обратите внимание, что в первой строчке стоит значение формулы $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ при $n = 1$, а во второй – то, что мы получили в самом начале, вычисляя первые производные функции e^{ax}. Именно это доказывает, что формула верна при $n = 1$.

<u>Предположим</u>, что формула $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ верна при $n = k$, то есть $(e^{ax})^{(k)} = a^k e^{ax}$.

2) *<u>Докажем</u>*, что тогда формула $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ верна при $n = k+1$.

Действительно,

$$(e^{ax})^{(k+1)} = \left((e^{ax})^{(k)}\right)^{(1)} = (a^k e^{ax})^{(1)} = a^k (e^{ax})^{(1)} = a^k \cdot ae^{ax} = a^{k+1} e^{ax}.$$

Получили, что $(e^{ax})^{(k+1)} = a^{k+1} e^{ax}$, а это ровно то, что получится, если в формулу $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ вместо n поставить $k+1$. Это означает, что формула верна при $n = k+1$.

Следовательно, формула верна при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Найдите и докажите самостоятельно, что $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Часто возникает вопрос: «В каком виде записать функцию, чтобы проще было считать производные высокого порядка?».

Например, рациональную функцию нужно разложить ***в сумму простейших дробей***. Напомним, что рациональная функция – это отношение двух многочленов. Чтобы решить задачу с рациональными функциями, мы всегда будем раскладывать их в сумму простейших. Приведем несколько примеров таких разложений.

Пример 1. Чтобы разложить дробь $\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}$ в сумму простейших дробей, ее надо записать в виде $\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$, причем, здесь коэффициенты a и b неизвестны. Их надо найти. Для этого снова приведем две полученные дроби к общему знаменателю, получим

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \equiv \frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}.$$

Мы получили две дроби $\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}$ и $\frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}$ с одинаковыми знаменателями. Две такие дроби будут тождественно равны (то есть равны при всех x из области определения функций), только если будут тождественно равны числители этих дробей. Но числители являются многочленами. А два многочлена тождественно равны, тогда и только тогда (только если) одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} a+b=7 \\ 2a-3b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a=25 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases}.$$

Поэтому получаем, что $\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+2}$.

Пример 2. Чтобы разложить дробь $\frac{x}{x^2-4x-5}$ в сумму простейших дробей, надо сначала разложить знаменатель дроби в произведение линейных скобок (если это возможно). Чтобы разложить квадратичное выражение x^2-4x-5 в произведение, надо найти корни уравнения $x^2-4x-5=0$ (в этом случае

$x_1 = -1,\ x_2 = 5$). Поэтому $x^2 - 4x - 5 \equiv (x+1)(x-5)$, и дробь $\frac{x}{x^2-4x-5}$ можно записать в виде $\frac{x}{x^2-4x-5} \equiv \frac{x}{(x+1)(x-5)}$.

Далее, дробь $\frac{x}{(x+1)(x-5)}$ надо записать в виде $\frac{x}{(x+1)(x-5)} \equiv \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+1}$, причем, здесь коэффициенты a и b неизвестны. Их надо найти. Для этого снова приведем две полученные дроби к общему знаменателю, получим

$$\frac{x}{(x+1)(x-5)} \equiv \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+1} \equiv \frac{(a+b)x+(a-5b)}{(x-5)(x+1)}.$$

Мы получили две дроби $\frac{x}{(x+1)(x-5)}$ и $\frac{(a+b)x+(a-5b)}{(x-5)(x+1)}$ с одинаковыми знаменателями. Две такие дроби будут тождественно равны (то есть равны при всех x из области определения функций), только если будут тождественно равны числители этих дробей. Но числители являются многочленами. А два многочлена тождественно равны, тогда и только тогда (только если) одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-5b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Поэтому получаем, что $\frac{x}{x^2-4x-5} \equiv \frac{x}{(x+1)(x-5)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x-5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1}$.

Пример 3. Чтобы разложить дробь $\frac{1}{x^3-1}$ в сумму простейших дробей, надо сначала попытаться разложить знаменатель дроби в произведение линейных скобок. К сожалению, в это случае такое разложение невозможно. Но всегда будет возможно разложение многочлена в произведение линейных скобок и квадратичных с отрицательным дискриминантом. В этом случае разность кубов $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 \equiv (x-1)(x^2+x+1)$, причем, выражение (x^2+x+1) в произведение линейных скобок не раскладывается (так как $D = 1 - 4 < 0$). Поэтому дробь $\frac{1}{x^3-1}$ можно записать только в виде $\frac{1}{x^3-1} \equiv \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

В этом случае, разложение в сумму простейших будет выглядеть иначе, а именно: $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$, причем, здесь коэффициенты a, b и c неизвестны, и их нужно найти. Для этого снова приведем две полученные дроби к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \equiv \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Мы получили две дроби $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ и $\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ с одинаковыми знаменателями. Две такие дроби будут тождественно равны (то есть равны при всех x из области определения функций), только если будут тождественно равны числители этих дробей. Но числители являются многочленами. А два многочлена тождественно равны, тогда и только тогда (только если) одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} a+b \qquad = 0 \\ a-b+c = 0 \\ a \qquad -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ \ 3a = 1 \\ a+b = 0 \\ a-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3}\,. \end{cases}$$

Поэтому получаем, что $\frac{1}{x^3-1} \equiv \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1}$.

Пример 4. Чтобы разложить дробь $\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}$ в сумму простейших дробей, надо сначала разложить знаменатель дроби в произведение линейных скобок и квадратичных с отрицательным дискриминантом. В этом случае разложение будет иметь вид $x(x^2+2x+1) \equiv x(x+1)^2$. В этом случае в произведении возникает линейная скобка в квадрате. Поэтому дробь можно записать только в виде $\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} \equiv \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$.

В этом случае, разложение в сумму простейших будет выглядеть иначе, а именно: $\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$, причем, здесь коэффициенты a, b и c неизвестны, и их нужно найти. Для этого снова приведем две полученные дроби к ***наименьшему*** общему знаменателю, получим

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \equiv \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}\,.$$

Мы получили две дроби $\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$ и $\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}$ с одинаковыми знаменателями. Две такие дроби будут тождественно равны (то есть равны при всех x из области определения функций), только если будут тождественно равны числители этих дробей. Но числители являются многочленами. А два многочлена тождественно равны, тогда и только тогда (только если) одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} \ a+b \qquad = 1 \\ 2a+b+c = -3 \\ \ a \qquad\quad\ = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -6\,. \end{cases}$$

Поэтому получаем, что $\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} \equiv 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - 6 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$.

Разложения рациональных функций в сумму простейших дробей у нас будут возникать и в дальнейшем.

Задача 5. Найти $\left(\frac{1}{x^2-5x+6}\right)^{(n)}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Разложим рациональную функцию $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ в сумму простейших: $\frac{1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2} \equiv \frac{ax-2a+bx-3b}{(x-3)(x-2)} \equiv \frac{(a+b)x+(-2a-3b)}{(x-3)(x-2)}$. Две такие дроби будут тождественно равны, если будет выполняться тождество
$(a+b)x + (-2a-3b) \equiv 1$. Для нахождения a и b нужно решить систему

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Поэтому получаем, что $\frac{1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$, и тогда по свойству производной разности

$$\left(\frac{1}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}.$$

Заметим, что считать производные дробей $\frac{1}{x-3}$ и $\frac{1}{x-2}$ гораздо проще, чем считать производные дроби $\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Найдем производную каждой из простейших дробей так же, как это было сделано ранее.

Заметим, что для дроби $\frac{1}{x-3}$ будет выполнено

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)' = ((x-3)^{-1})' = -1(x-3)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)'' = (((x-3)^{-1})')' = (-1(x-3)^{-2})' = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} =$$
$$= (-1)^2 \cdot 2! \cdot x^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)''' = ((-1)^2 \cdot 2! \cdot x^{-3})' = (-1)^2 \cdot 2!\,(-3) \cdot x^{-4} = (-1)^3 \cdot 3! \cdot x^{-4}.$$

Возникает предположение, что $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1}$. Докажем, что это верно методом математической индукции.

1) *Проверим*, что формула $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1}$ верна при $n = 1$. Действительно,

$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(1)} = (-1)^1 \cdot (1)! \cdot (x-3)^{-1-1}$, то есть

$\left(\frac{1}{x-3}\right)' = -1 \cdot 1 \cdot (x-3)^{-2}$ – а это верно.

2) *Предположим*, что формула $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot (n)! \cdot (x-3)^{-n-1}$ верна при $n = k$, то есть, что верно равенство $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(k)} = (-1)^k \cdot (k)! \cdot (x-3)^{-k-1}$.

3) *Докажем*, что тогда формула $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot (n)! \cdot (x-3)^{-n-1}$ верна при $n = k+1$.

Действительно, так как $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$, то

$$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(k+1)} = \left(\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(k)}\right)^{(1)} = ((-1)^k \cdot (k)! \cdot (x-3)^{-k-1})^{(1)} =$$
$$= (-1)^k \cdot (k)! \cdot (-k-1) \cdot (x-3)^{-k-1-1} =$$
$$= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot (x-3)^{-(k+1)-1}.$$

Получили, что $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot (x-3)^{-(k+1)-1}$, а это ровно то, что получится, если в формулу $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot (n)! \cdot (x-3)^{-n-1}$ вместо n поставить $k+1$. Это означает, что формула верна при $n = k+1$.

Следовательно, формула $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot (n)! \cdot (x-3)^{-n-1}$ верна при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Аналогично можно доказать, что $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot (n)! \cdot (x-3)^{-n-1}$ и поэтому

$$\left(\frac{1}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} =$$
$$= (-1)^n \cdot (n)! \cdot (x-3)^{-n-1} + (-1)^n \cdot (n)! \cdot (x-3)^{-n-1} =$$
$$= (-1)^n \cdot (n)! \left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} + \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right) \text{ при } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Задача 6. Найти $\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{(n)}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

У неправильной дроби $\frac{2x+1}{3x-1}$ надо выделить целую часть, например, так:

$$\frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{\frac{5}{6}}{x-\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{x-\frac{1}{3}}.$$

И задача сводится к вычислению n-й производной простейшей дроби $\frac{1}{x-\frac{1}{3}}$.

Сделайте это самостоятельно.

Формула Лейбница

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в окрестности точки x производную n-го порядка, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в окрестности точки x производную n-го порядка, причем,

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (u)^{(k)}(v)^{(n-k)},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, и полагаем, что $(u(x))^{(0)} = u(x),\ (v(x))^{(0)} = v(x)$.

Эта формула «особенно хороша», когда функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют «почти циклические» производные, или все производные хотя бы одной из функций, начиная с некоторой, тождественно равны нулю.

При выполнении вычислений эту формулу часто бывает полезно «развернуть», то есть записать в виде:

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, (u)^{(k)}(v)^{(n-k)} =$$
$$= C_n^0(u)^{(0)}(v)^{(n)} + C_n^1(u)^{(1)}(v)^{(n-1)} + \cdots + C_n^k(u)^{(k)}(v)^{(n-k)} + \cdots +$$
$$+C_n^n(u)^{(n)}(v)^{(0)}.$$

Задача 1. Найти $y^{(n)}(x)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$, если $y(x) = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$. Найти $y^{(10)}(x)$.

Решение.

$$y^{(n)}(x) = \left((x^2 + x + 1)e^{-3x}\right)^{(n)} =$$
$$= C_n^0(x^2 + x + 1)^{(0)}(e^{-3x})^{(n)} + C_n^1(x^2 + x + 1)^{(1)}(e^{-3x})^{(n-1)} +$$
$$+C_n^2(x^2 + x + 1)^{(2)}(e^{-3x})^{(n-2)} + \cdots$$

так как

$$(x^2+x+1)^{(0)} = x^2+x+1$$

$$(x^2+x+1)^{(1)} = 2x+1$$

$$(x^2+x+1)^{(2)} = 2$$

$$(x^2+x+1)^{(n)} = 0,\ \forall n \geq 3,$$

поэтому в выражении для $y^{(n)}(x) = \left((x^2+x+1)e^{-3x}\right)^{(n)}$ будут отличны от нуля только первые три слагаемых

$$\boxed{\equiv}\ \frac{n!}{0!n!}\cdot(x^2+x+1)\cdot((-3)^n e^{-3x}) + \frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot(2x+1)\cdot((-3)^{n-1}e^{-3x}) +$$
$$+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot 2\cdot((-3)^{n-2}e^{-3x}) =$$
$$= (x^2+x+1)(-3)^n e^{-3x} + n(2x+1)(-3)^{n-1}e^{-3x} +$$
$$+n(n-1)(-3)^{n-2}e^{-3x}\ \boxed{\equiv}$$

вынесем за скобку общий множитель $(-3)^{n-2}e^{-3x}$, получим

$$\boxed{\equiv}\ (-3)^{n-2}e^{-3x}\left((x^2+x+1)\cdot 9 + n(2x+1)\cdot(-3) + n(n-1)\right) =$$
$$= (-3)^{n-2}e^{-3x}(9x^2+9x+9-6nx-3n+n^2-n) =$$
$$= (-3)^{n-2}e^{-3x}\left(9x^2+x(9-6n)+(n^2-4n+9)\right).$$

И тогда

$$y^{(10)}(x) = (3)^8 e^{-3x}(9x^2-51x+69).$$

Ответ: $\left((x^2+x+1)e^{-3x}\right)^{(n)} =$
$= (-1)^{n-2}3^{n-2}e^{-3x}\left(9x^2+x(9-6n)+(n^2-4n+9)\right)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$y^{(10)}(x) = 3^8\cdot e^{-3x}\cdot(9x^2-51x+69).$$

Замечание. Мы получили выражение для $y^{(n)}(x)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$. Теперь, чтобы найти $y^{(125)}(x)$, не надо считать по порядку первые 124 производные, достаточно в формулу для $y^{(n)}(x)$ вместо n подставить 125. Удобно, не правда ли?

Задача 2. Найти $y^{(n)}(x)$ при $\forall n \in \mathbb{N}$, если $y(x) = (x^2+2x+4)\sin x$.

Решение. Так как

$$(x^2+2x+4)^{(0)} = x^2+2x+4$$

$$(x^2+2x+4)^{(1)} = 2x+2$$

$(x^2+2x+4)^{(2)}=2$

$(x^2+2x+4)^{(n)}=0,\ \forall n\geq 3,$

то в выражении для $y^{(n)}(x)=\left((x^2+x+1)e^{-3x}\right)^{(n)}$ будут отличны от нуля только первые 3 слагаемых:

$$\left(y(x)\right)^{(n)}=\left((x^2+2x+4)\sin x\right)^{(n)}=$$
$$=C_n^0(x^2+2x+4)^{(0)}(\sin x)^{(n)}+C_n^1(x^2+2x+4)^{(1)}(\sin x)^{(n-1)}+$$
$$+C_n^2(x^2+2x+4)^{(2)}(\sin x)^{(n-2)}+\cdots=$$
$$=\frac{n!}{0!n!}\cdot(x^2+2x+4)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)+$$
$$+\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot(2x+2)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)\right)+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot 2\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right)=$$
$$=(x^2+2x+4)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)+n(2x+2)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)+$$
$$+n(n-1)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}-\pi\right)\right)=$$
$$=(x^2+2x+4)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-n(2x+2)\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-$$
$$-n(n-1)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)=$$
$$=(x^2+2x-n^2+n+4)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-2n(x+1)\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

Были использованы ***формулы приведения*** $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha)$ и $\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\alpha)$.

Ответ: $y^{(n)}(x)=\left((x^2+2x+4)\sin x\right)^{(n)}=$
$=(x^2+2x-n^2+n+4)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-2n(x+1)\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$ при $\forall n\in\mathbb{N}$.

Задача 3. Найти $y^{(n)}(x)$ при $\forall n\in\mathbb{N}$, если $y(x)=e^{-x}\sin x$.

Решение.

$$y^{(n)}(x)=(e^{-x}\sin x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(e^{-x})^{(k)}(\sin x)^{(n-k)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(-1)^k e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi(n-k)}{2}\right).$$

В этом случае запись результата «в общем виде» выглядит наиболее просто.

Ответ: $y^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(-1)^k e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi(n-k)}{2}\right)$ при $\forall n\in\mathbb{N}$.