Билет 1. Множества и операции над ними

1.1. Понятие множества

Понятия множества и его элемента относятся к числу первичных, неопределяемых понятий математики. К таким же понятиям относятся точка, прямая линия и др. Вместо определения такого понятия приходится обходиться его описанием. Создатель теории множеств Георг Кантор в 1872 году описал понятие множества, как «объединения в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Мы будем говорить, что определено некоторое множество M объектов, если указан признак, который позволяет относительно каждого предмета x сказать, принадлежит ли этот предмет множеству M, или нет.

Элементы множеств в дальнейшем будем записывать строчными латинскими буквами, сами множества – прописными. Обозначение $a \in A$ используется, как краткая запись утверждения: a есть элемент множества A, или: a принадлежит A. Аналогично, обозначение $a \notin A$ используется, как краткая запись утверждени я: a не является элементом множества A, или: a не принадлежит A. Множество, не имеющее элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Укажем ряд способов задания множеств. Во-первых, можно просто перечислить все элементы множества, если этих элементов – конечное число, т.е. если множество конечное. Например, множество, состоящее из двух чисел, 0 и 1. В этом случае используется обозначение $\{0,1\}$. Для произвольного конечного множества, например, состоящего из различных элементов $a_1,...,a_m$ используется обозначение $\{a_1,...,a_m\}$. Подчеркнём, что в этом обозначении множества элементы $a_1,...,a$ должны быть различными, однако они могут быть перечислены в произвольном порядке, например {1, 2, 3, 4} и {2, 1, 3, 4} - различные обозначения одного и того же множества.

Можно также указать свойство, которому удовлетворяют элементы рассматриваемого множества. Например, множество действительных чисел, больших 5. Обозначим его $\{x \mid x > 5\}$.

Некоторые множества определяются с помощью указания способа последовательного построения его элементов. Например, $x_1 = 1$, $x_n = n$,

x_{n-1} , $n = 2, 3,\ldots$

Новые множества можно получать и в результате операций над заданными множествами.

Наиболее часто у нас будут рассматриваться множество R действительных чисел, множество N натуральных чисел, множество Z целых чисел, множество Q рациональных чисел.

1.2. Подмножества

Важный способ задания множества – выделение его, как части некоторого ***основного*** множества. Основное множество образуется всеми элементами какого-нибудь определённого типа. Например, множество целых чисел, множество простых чисел и т.п.

В качестве примера рассмотрим основное множество целых чисел и выберем в нём те числа, которые делятся на 2, т.е. чётные числа. Мы получили множество чётных чисел, которое является подмножеством основного множества целых чисел.

В общем случае, если все элементы множества A являются также элементами множества B, то мы говорим, что A есть *подмножество* B, или A включено в B, и обозначаем это так: $A \subset B$.

Если оказалось, что одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то эти множества называются ***равными***, что обозначается $A = B$. Проще говоря, равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Из того, что $A \subset B$ и $B \subset C$ следует, что $A \subset C$ (т.е. отношение включения множеств является ***транзитивным***. Понятие отношения и его свойства будут подробнее описаны в билете 2).

1.3. Операции над множествами

Пусть задано некоторое основное множество M и его подмножества A и B.

Определение 1.1. Объединение $A \cup B$ этих множеств определяется, как подмножество множества M, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B.

Определение 1.2. Пересечение $A \cap B$ этих множеств определяется, как подмножество множества M, состоящее из элементов, одновременно входящих как в множество A, так и в множество B.

Определение 1.3. Дополнение множества ${}^{c}A$ или же $\bar{A}$ определяется, как подмножество множества M, не содержащее элементов множества A.
Перечислим некоторые свойства операций над множествами:

(где ∩ - это “и”, ∪ - “или”)

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

${}^{c}(A \cup B) = {}^{c}A \cap {}^{c}B$, ${}^{c}(A \cap B) = {}^{c}A \cup {}^{c}B$

$A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup M = M$, $A \cap M = A$,

$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing, {}^{c}\varnothing = M, {}^{c}M = \varnothing, {}^{c}({}^{c}A) = A,$

$A \cup {}^{c}A = M, A \cap {}^{c}A = \varnothing.$

В качестве примера докажем свойство ${}^{c}(A \cup B) = {}^{c}A \cap {}^{c}B$. Для этого заметим, что условие $x \in {}^{c}(A \cup B)$ равносильно тому, что $x \notin (A \cup B)$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $x \notin A$ и $x \notin B$, т.е. $x \in {}^{c}A \cap {}^{c}B$. Свойство доказано.

Это утверждение, вместе с утверждением ${}^{c}(A \cap B) = {}^{c}A \cup {}^{c}B$, называют ***теоремами де Моргана***. Доказательства остальных свойств ещё проще, и мы их опускаем.