

Билет 3. Верхняя и нижняя грани. Стягивающиеся отрезки.

3.1. Верхняя и нижняя грани

Определение 3.1. Множество A *ограничено сверху*, если существует такое число M , что $\forall a \in A \ a \leq M$. При этом число M называется *верхней границей* или *гранью* множества A . Множество A *ограничено снизу*, если существует такое число m , что $\forall a \in A \ a \geq m$. При этом число m называется *нижней границей* или *гранью* множества A .

Легко видеть, что если множество A ограничено сверху (снизу), то любое число, большее M (меньшее m) тоже будет его верхней (нижней) границей.

Определение 3.2. Если множество A ограничено сверху, то наименьшая из его верхних граней называется *точной верхней гранью* A и обозначается $\sup A$.

Теорема 3.1. *Если множество A ограничено сверху, то существует точная верхняя грань этого множества.*

Доказательство. Выберем множество B таким, что $\forall a \in A \ a \leq M$ (т.е. B – это множество всех верхних граней A). Докажем, что множество B имеет наименьший элемент. По аксиоме отделимости (см. билет 2) существует такое $c \in R$, что $\forall a \in A, \forall b \in B: a \leq c \leq b$. Так как для всех $a \in A$ имеем $a \leq c$, число c является верхней гранью A . Так как для всех $\forall b \in B \ c \leq b$, число c – наименьшее среди элементов множества B . Таким образом, $c = \sup A$, что и требовалось доказать.

Определение 3.3. Если множество A ограничено снизу, то наибольшая из нижних граней называется *точной нижней гранью* A и обозначается $\inf A$.

Теорема 3.2. *Если множество A ограничено снизу, то существует точная нижняя грань этого множества.*

Доказательство. Доказательство можно провести двумя способами.

1 способ. По аналогии с теоремой 3.1. рассмотрим множество D нижних граней множества A . Применить аксиому отделимости к D и A . По аксиоме отделимости (см. билет 2) существует такое $d \in R$, что для всех $b \in D$, для всех $a \in A$ имеет место неравенство $b \leq d \leq a$. Так как для всех $a \in A$ выполняется неравенство $d \leq a$, d является нижней гранью A . Так как для всех $b \in D$ имеем $b \leq d$, d – наибольшая среди нижних граней множества A , т.е. $d = \inf A$.

2 способ. Определим множество $-A$ так: $-A = \{-a, a \in A\}$. Если A ограничено снизу, то $-A$ ограничено сверху, поэтому $\exists \sup(-A)$, кроме того, $\inf A = \sup(-A)$.

3.2. Стягивающиеся отрезки

Определение 3.4. Система отрезков $\{[a_k, b_k], k \in N\}$ называется *вложенной*, если $\forall k [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Теорема 3.3. *Любая вложенная система отрезков имеет хотя бы одну общую для всех отрезков точку, т.е. $\exists a \in R: \forall k a \in [a_k, b_k]$. Иными словами, $\exists a: a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ или $\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \neq \emptyset$.*

Доказательство. Выберем множества A и B так, что $A = [a_1, a_2, \dots, a_k]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_k]$. Для того чтобы применить аксиому отделимости, необходимо доказать, что $\forall k, l$ выполняются неравенства $a_k \leq b_l$.

Выберем m так, что $m \geq (k, l)$. Тогда $a_k \leq a_m, b_m \leq b_l$. Значит,
 $\exists c \in R: \forall k, l a_k \leq c \leq b_l$, полагая $l = k$, получим: $\forall k a_k \leq c \leq b_k$.

Таким образом, c - общая для всех отрезков точка. Теорема доказана.

Определение 3.5. Система отрезков $\{[a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \dots\}$ называется *стягивающейся* системой отрезков, если длины этих отрезков стремятся к 0 при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 3.4. *Общая точка стягивающейся системы отрезков единственна.*

Доказательство. Допустим, что есть 2 общие точки $c_1 \neq c_2, c_1 < c_2$.

Тогда $\forall k [a_k, b_k] \supset [c_1, c_2]$. Возьмем $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$. Найдется такое $N(\varepsilon)$, что для любого $n > N(\varepsilon) b_n - a_n < \varepsilon$.

Одновременно получаем, что

$$c_2 - c_1 < \frac{(c_2 - c_1)}{2} \begin{cases} b_n - a_n < \varepsilon \\ [a_n, b_n] \supset [c_1, c_2] \\ \downarrow \\ b_n - a_n > c_2 - c_1 \end{cases}$$

откуда $\frac{c_2 - c_1}{2} < 0$. Но $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2} > 0$. Тем самым, мы пришли к

противоречию. Теорема доказана.

Замечания:

- точка c является точной верхней гранью множества левых отрезков и точной нижней гранью множества правых концов этих отрезков;
- вложенная система интервалов может не иметь общую точку, как показывает

Пример. Рассмотрим $(a_n, b_n) = (0, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, 3, \dots$. У этих интервалов нет общей точки – докажем это от противного. Если бы общая точка α была, то она принадлежала бы первому интервалу, т.е. $\alpha \in (0, 1)$, $0 < \alpha < 1$. Выберем число $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{1}{n} < \alpha$, т.е. $n > \frac{1}{\alpha}$. Тогда $\alpha \notin (0, \frac{1}{n})$ вопреки предположению.