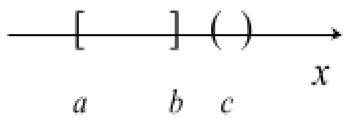
Билет 4. Предельные точки

Определение 4.1. ***Окрестностью*** $U(a)$ точки а называется любой интервал, содержащий точку a. Чаще всего рассматривают симметричную окрестность радиуса δ, $U_\delta(a)$ $(a - \delta, a + \delta)$. ***Проколотой окрестностью*** точки а называется окрестность точки а, из которой исключена сама точка a, т.е. $\mathring{U}(a) = U(a) - a$.

Определение 4.2. a - ***предельная точка*** множества A, если в любой проколотой окрестности точки а есть точки из множества A. Символами это записывается так: $\forall \, \mathring{U}(a) \;\; \mathring{U}(a) \cap A \neq \emptyset$.

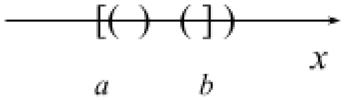
В определении не сказано, что $a \in A$. В приведенных ниже примерах встретятся ситуации, и когда предельная точка а множества A принадлежит самому множеству A, и когда она не принадлежит множеству A.

Пример 1. Пусть $A = [a, b]$. Любая точка с, не принадлежащая этому отрезку, не является предельной точкой (рис. 1).



(рис. 1)

Для любой с $\notin$ $[a, b]$ можно указать окрестность точки с, не пересекающуюся с $[a, b]$.



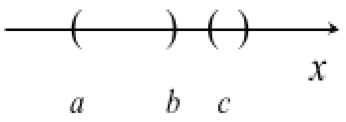
(рис. 2)

Любая окрестность любой точки с $\in [a, b]$ имеет непустое пересечение с $[a, b]$ (рис. 2).

Множество предельных точек отрезка - сам отрезок.

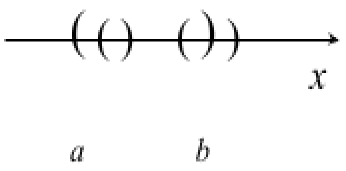
<u>**Определение 4.3.**</u> Множество, содержащее все свои предельные точки, называется ***замкнутым.***

Пример 2. Пусть $A = (a, b)$. Как и выше, если с $\notin [a, b]$, то с не является предельной точкой А.



(*рис.* 3)

Но любая окрестность любой точки с $\in [a, b]$ имеет непустое пересечение с (a, b),



(*рис.* 4)

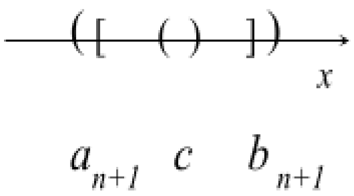
Поэтому множеством предельных точек интервала (a, b) является отрезок $[a, b]$. В этом случае концы a, b этого отрезка – предельные точки (a, b), не принадлежащие (a, b).

Теорема 4.1. ***Если A - бесконечное ограниченное множество, то существует предельная точка множества A.***

(<u>Примечание</u> к формулировке теоремы: «множество А ограниченное» означает, что $\exists\, c, d\ \forall\ a \in A\ \ c \leq a \leq d$; «бесконечное» – т.е. содержит бесконечно много точек.)

Доказательство. Рассмотрим отрезок $\left[c_1,\ d_1\right] = [c,\ d]$. Разделим его на 2 равные части. Хотя бы в одну из половин отрезка входит бесконечное множество точек A. Возьмем полученный отрезок $[c_2, d_2]$ и тоже разделим его на 2 равные части. Хотя бы один из полученных отрезков $[c_3, d_3]$ тоже содержит бесконечное множество точек из A. Продолжим процесс деления отрезков. В итоге имеем систему стягивающихся отрезков. По теоремам (**3.3**, **3.4**) эта система имеет единую для всех отрезков точку с. Утверждаем, что точка c - предельная точка множества A. Выберем произвольную окрестность $\mathring{U}(c)$ и в ней окрестность $\mathring{U}_\delta(c)$. После этого возьмем n такое, чтобы длина отрезка $\left[a_{n+1},\ b_{n+1}\right]$, равная $\frac{d_1 - c_1}{2^n}$, оказалась меньше δ, т.е . $\frac{d_1 - c_1}{2^n} < \delta$

$$\Leftrightarrow 2^n > \frac{d_1 - c_1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{d_1 - c_1}{\delta}\ .$$



(*рис.* 5)

Так как, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset U_\delta(c)$ (*см. рис. 5*), и так как $\left[a_{n+1},\ b_{n+1}\right]$ содержит, по построению, бесконечное множество точек из A, проколотая окрестность $\mathring{U}_\delta(c)$, также содержит бесконечное множество точек из A. Итак, доказано, что произвольная окрестность $\mathring{U}(c)$ содержит точки из A. Следовательно, с – предельная точка множества A.

В дополнение сформулируем и докажем еще одно важное свойство предельных точек.

Теорема 4.2. ***Если a – предельная точка множества A, то в любой проколотой окрестности точки a содержится бесконечное множество точек из A.***

Доказательство. Рассмотрим произвольную окрестность $\mathring{U}(a)$ и в ней также произвольную $\mathring{U}_\delta(a) \subset \mathring{U}(a)$. Обозначаем $\delta_1 = \delta$. В $\mathring{U}_{\delta_1}(a)$ существует точка $a_1 \in A$, по определению предельной точки. Пусть $\delta_2 < (\delta_1, |a - a_1|)$. В $U_{\delta_2}(a)$ существует точка $a_2 \in A$. Точка a_2 не может совпасть с a_1, т.к. $|a_2 - a| < \delta_2 < |a - a_1|$. Далее полагаем $\delta_3 < (\delta_2, |a_2 - a|)$. В $\mathring{U}_{\delta_3}(a)$ существует точка $a_3 \in A$, причем $a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$, т.к. $|a_3 - a| < \delta_3 < |a_2 - a| < |a_1 - a|$ и т.д.

В итоге получаем бесконечное множество точек из А, входящих в $\mathring{U}(a)$, что и утверждалось.

Следствие. ***Конечное множество не имеет предельных точек.***