Билет 5. Предел последовательности. Предел функции.

Определение 5.1. Если каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставлено число $a_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана ***последовательность*** $\{\boldsymbol{a_n}\}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Некоторые последовательности обладают очень важным свойством – они имеют предел.

Определение 5.2. Последовательность $\{a_n\}$ ***имеет предел, равный числу*** $\boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $n > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Удобно записывать это определение с помощью логических символов:
$\forall \varepsilon > 0 \exists\ N(\varepsilon) > 0 \forall\ n > N(\varepsilon)\ |a_n - A| < \varepsilon$.

Для обозначения предела последовательности используется символ: $\lim\limits_{x\to\infty} a_n$.

Пример 1. Если $a_n = A$ для всех n, то $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $N(\varepsilon)$, и любого n $|a_n - A| = |A - A| = 0 < \varepsilon$.

Пример 2. Если $a_n = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда если $n > N(\varepsilon)$,

то $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$, поэтому $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Определение 5.3. (определение предела по Коши). Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{W}(a)$ точки a. Функция $f(x)$ имеет ***при $x \to a$ предел, равен числу A*** тогда и только тогда, когда для любой окрестности $V(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a $\left(\mathring{U}(a) \subset \dot{W}(a)\right)$ такая, что $f(\mathring{U}(a)) \subset V(A)$, или, равносильно, такая, что для любого $x \in \mathring{U}(a)$ $f(x) \in V(A)$.

С помощью логических символов это определение записывается так:

$\forall \boldsymbol{V(A)}\ \exists\ \mathring{U}(\boldsymbol{a})\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathring{U}(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{V(A)}$

В этом определении можно вместо произвольной $V(A)$ рассматривать $V_\varepsilon(A)$ при произвольном $\varepsilon > 0$ и, соответственно, вместо $\mathring{U}(a)$ - проколотую окрестность $\mathring{U}_\delta(a)$. Тогда оно примет вид:

$\forall \boldsymbol{V_\varepsilon(A)}\ \exists\ \mathring{U}_{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{a})\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathring{U}_{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{V_\varepsilon(A)}$.

Вспоминая, что условие $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ равносильно неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, а условие $f(x) \in V_\varepsilon(A)$ равносильно условию $|f(x) - A| < \varepsilon$, получаем равносильную определению **5.3** запись определения предела на "**языке $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$**":

$\forall \boldsymbol{\varepsilon > 0}\ \exists\ \boldsymbol{\delta > 0}\ \forall \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{0 < |x - a| < \delta}\ \boldsymbol{|f(x) - A| < \varepsilon}$

Теорема 5.1.

Если предел последовательности $\{a_n\}$ существует, то он единствен, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_1$ и если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_2$, то $A_1 = A_2$.

Доказательство. (метод от противного). Предположим, что последовательность имеет пределом число A_1, а также имеет пределом число A_2, $A_1 \neq A_2$, тогда:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1(\varepsilon) > 0\ \forall n > N_1(\varepsilon) \quad |a_n - A_1| < \varepsilon.$

Полагая $\varepsilon = \frac{|A_2 - A_1|}{2}$, получаем, что при $n > N_1$ $|a_n - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$. Аналогично, поскольку A_2 - тоже предел, получаем, что при $n > N_2$ $|a_n - A_2| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$.

Пусть $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при $n > N$ выполняются условия $n > N_1$ и $n > N_2$, поэтому

$$|A_2 - A_1| = |A_2 - a_n + a_n - A_1|$$

$$|A_2 - a_n + a_n - A_1| \le |A_2 - a_n| + |a_n - A_1|$$

$$|A_2 - a_n| + |a_n - A_1| = |a_n - A_2| + |a_n - A_1|$$

$$|a_n - A_2| + |a_n - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2}$$

$$\frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2} = |A_2 - A_1|$$

Тогда:

$$|A_2 - A_1| < |A_2 - A_1|$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 5.2.

Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует, то он единствен, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_2$, то $A_1 = A_2$.

Доказательство. Утверждение этой теоремы доказывается вполне аналогично, но оно будет приведено ниже для полноты изложения. Пусть снова функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ два предела, A_1и A_2. Тогда, применяя определения предела при $x \to a$ получаем, что для $\varepsilon = \frac{|A_2 - A_1|}{2}$ существуют числа δ_1и δ_2 такие, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$, а при $0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \frac{|A_2 - A_1|}{2}$. Тогда положим $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ и потребуем, чтобы $0 < |x - a| < \delta$.

При этом

$$|A_2 - A_1| = |A_2 - f(x) + f(x) - A_1|$$

$$|A_2 - f(x) + f(x) - A_1| \leq |A_2 - f(x)| + |f(x) - A_1|$$

$$|A_2 - f(x)| + |f(x) - A_1| = |f(x) - A_2| + |f(x) - A_1|$$

$$|f(x) - A_2| + |f(x) - A_1| < \frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2}$$

$$\frac{|A_2 - A_1|}{2} + \frac{|A_2 - A_1|}{2} = |A_2 - A_1|$$

Тогда:

$$|A_2 - A_1| < |A_2 - A_1|$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 5.4. Последовательность $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ называется ***бесконечно малой,*** если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Аналогично, функция $\alpha(x)$ - ***бесконечно малая при $x \to a$***, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Теорема 5.3.

Предел последовательности $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ существует и равен A тогда и только тогда, когда a_n можно представить в виде $a_n = A + \alpha_n$, где α_n - бесконечно малая последовательность.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Доказательство. Доказательство проведем для случая функций. Для последовательностей оно аналогично.

Итак, обозначим $\alpha(x) = f(x) - A$. Условие $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ равносильно тому, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x\ \ 0 < |x - a| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$,
что равносильно условию $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x\ \ 0 < |x - a| < \delta\ |\alpha(x)| < \varepsilon$,
что, в свою очередь, означает, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.