Билет 6. Свойства бесконечно малых величин. Арифметические свойства предела.

Определение 6.1. Функция $\beta(x)$ называется ограниченной при $x \to a$, если она ограничена в некоторой $\mathring{U}(a)$, т.е. если $\exists c$: $\forall x \in \mathring{U}(a)$ $|\beta(x)| < c$.

Теорема 6.1. (Свойства бесконечно малых величин)

Бесконечно малые функции:

1. Если $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, то алгебраическая сумма - $\boldsymbol{\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)}$ тоже бесконечно малая при $x \to a$.
2. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая и $\beta(x)$ – ограниченная при $x \to a$ функции, то произведение $\boldsymbol{\alpha(x) \cdot \beta(x)}$ есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.
3. Если $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ функции, то произведение $\boldsymbol{\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)}$ **–** тоже бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Бесконечно малые последовательности:

1. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то алгебраическая сумма – $\boldsymbol{\{\alpha_n\} \pm \{\beta_n\}}$ тоже бесконечно малая последовательность.
2. Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, а $\{\gamma_n\}$ - ограниченная последовательность (т.е. $\exists c$: $|\gamma(x)| < c$), то $\boldsymbol{\{\alpha_n \cdot \gamma_n\}}$ - бесконечно малая последовательность.
3. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - бесконечно малые последовательности, то их произведение $\boldsymbol{\{\alpha_n \cdot \beta_n\}}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Доказательство проводим для случая бесконечно малых функций.

1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, по определению предела,

   $\exists \delta_1 > 0\ \forall x$: $0 < |x - a| < \delta_1\ |\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

   $\exists \delta_2 > 0\ \forall x$: $0 < |x - a| < \delta_2\ |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

   Обозначив $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, получаем:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \begin{cases} 0<|x-a|<\delta_1 \\ 0<|x-a|<\delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha_1|<\dfrac{\varepsilon}{2} \\ |\alpha_2|<\dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

По свойству модулей: $|c+d| \le |c|+|d|$, обозначив $c=\alpha_1(x)$, $d=\alpha_2(x)$ получаем:

$|\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Таким образом,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x$: $0 < |x-a| < \delta\ \ |\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| < \varepsilon,$

т.е. $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ - бесконечно малая.

2. $\beta(x)$ – ограничена при $x \to a$, т.е. $\exists \mathring{U}\delta_0(a)$, $\exists c$: $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)$ $|\beta(x)| < c$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\frac{\varepsilon}{c}$.

Тогда $\exists\delta_1\ \forall x$: $0 < |x-a| < \delta_1\ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$.

Обозначив за $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$, получаем:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \begin{cases} 0<|x-a|<\delta_0 \\ 0<|x-a|<\delta_1 \end{cases} \Rightarrow |\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{c}, |\beta(x)| < c \Rightarrow |\alpha(x)\cdot\beta(x)| < \varepsilon$$

Значит, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x$: $0 < |x - a| < \delta\ |\alpha(x)\cdot\beta(x)| < \varepsilon$, т.е. $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

3. Докажем сначала лемму.

<u>**Лемма 6.1.**</u> Если $\boldsymbol{\alpha(x)}$ - бесконечно малая при $\boldsymbol{x \to a}$ функция, то она ограничена при $\boldsymbol{x \to a}$ (наоборот - неверно!).

Доказательство.

Возьмем $\varepsilon = 1$ и получим, что $\exists\delta > 0\ \forall x$: $0 < |x-a| < \delta\ \ |\alpha(x)| < 1$. Таким образом, при $x \to a$ функция $\alpha(x)$ ограничена. Лемма доказана.

Вернёмся к теореме. По доказанной лемме $\alpha_2(x)$ - ограничена при $x \to a$. Осталось применить свойство 2) бесконечно малых, доказанное выше.

<u>**Теорема 6.2. (Арифметические свойства предела)**</u>

Для функций:

Пусть две функции $\boldsymbol{f_1(x)}$ и $\boldsymbol{f_2(x)}$, имеют пределы $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$, соответственно, при $\boldsymbol{x \to a}$. Тогда предел суммы, разности, произведения, и, если $\boldsymbol{A_2 \neq 0}$, частного этих функций равны соответственно сумме, разности, произведению и частному значения этих пределов, т.е.

Если $\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = A_2 \implies \lim_{x\to a} f_1(x) \stackrel{+}{\div} f_2(x) = A_1 \stackrel{+}{\div} A_2$,

а если $A_2 \neq 0$, то $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$.

Для последовательностей:

Пусть две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, имеют пределы A и B, соответственно, при $n \to \infty$. Тогда предел суммы, разности, произведения, и, если $B \neq 0$, частного этих последовательностей равны соответственно сумме, разности, произведению и частному значения этих пределов, т.е.

Если $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \implies \lim_{n\to\infty} a_n \stackrel{+}{\div} b_n = A \stackrel{+}{\div} B$,

а если $B \neq 0$, то и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

Доказательство. По теореме **5.3** из условия следует, что $f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x)$, $f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$ функции. Тогда $f_1(x) \pm f_2(x) = A_1 \pm A_2 + \alpha_1(x) \pm \alpha_2(x) = A_1 \pm A_2 + (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))$. По теореме **6.1** алгебраическая сумма бесконечно малых $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ − бесконечно малая функция, т.е. $\lim_{x\to a}\big(f_1(x) \pm f_2(x)\big) = A_1 \pm A_2$.

Перейдем к произведению $f_1(x) \cdot f_2(x) = (A_1 + \alpha_1(x)) \cdot (A_2 + \alpha_2(x)) = A_1 \cdot A_2 +$ $+ A_2 \cdot \alpha_1(x) + A_1 \cdot \alpha_2(x) + \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)$. Последние слагаемые ($A_2 \cdot \alpha_1(x)$, $A_1 \cdot \alpha_2(x)$, $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)$) - бесконечно малые величины при $x \to a$, их сумма аналогично бесконечно малая при $x \to a$. Тогда $\lim_{x\to a}\big(f_1(x) \cdot f_2(x)\big) = A_1 \cdot A_2$.

Перед переходом к пределу частного, докажем сначала лемму:

<u>Лемма 6.2.</u>

Если $A_2 \neq 0$, то $\exists \delta > 0\ \forall x\colon 0 < |x - a| < \delta$ выполняется также неравенство $|f_2(x)| > \frac{|A_2|}{2}$.

Доказательство.

Выберем $\varepsilon = \frac{|A_2|}{2}$. Тогда $\exists \delta > 0\ \forall x\colon 0 < |x - a| < \delta\ |f_2(x) - A_2| < \frac{A_2}{2} \implies$ $A_2 - \frac{|A_2|}{2} < f_2(x) < A_2 + \frac{|A_2|}{2} \implies f(x) < \frac{|A_2|}{2}$. Лемма доказана.

Лемма 6.3.

Если $A_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}$

Доказательство. Имеет место равенство: $\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{A_2} = \frac{A_2 - f_2(x)}{A_2 \cdot f_2(x)} = \frac{-\alpha_2(x)}{A_2 \cdot f_2(x)}$. По лемме 6.1 в $\mathring{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f_2(x)| \cdot |A_2| > \frac{|A_2|}{2} \cdot |A_2|$, следовательно, $\left|\frac{1}{f_2(x) \cdot A_2}\right| < \frac{2}{{A_2}^2}$. Значит, функция $\frac{1}{f_2(x) \cdot A_2}$ ограничена при $x \to a$, и $\frac{-\alpha_2(x)}{f_2(x) \cdot A_2}$ - бесконечно малая при $x \to a$. Таким образом, $\frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}$ бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}$. Лемма доказана.

Для доказательства равенства $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$ применим лемму 6.3 и часть теоремы 6.2, относящуюся к пределу произведения функций.