

Билет 7. Предельный переход в неравенствах. Вычисление $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Теорема 7.1.

Если функция имеет предел при $x \rightarrow a$, равный A , и в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a принимает неотрицательные значения, то $A \geq 0$

Доказательство.

Будем доказывать методом от противного. Допустим, что $A < 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Тогда $\exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta, |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$, откуда $f(x) < A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0$

Получаем, что для любого x из пересечения проколотых окрестностей $\mathring{U}(a)$ и $\mathring{U}_\delta(a)$ одновременно выполняются неравенства $f(x) < 0$ и $f(x) \geq 0$. Тем самым мы пришли к противоречию. **Теорема доказана.**

Теорема 7.2. Если для двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющих пределы, соответственно, A_1 и A_2 , в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f_1(x) < f_2(x)$, то $A_1 \leq A_2$.

Доказательство. Обозначим $\varphi(x) = f_2(x) - f_1(x)$. При этом $\forall x \in \mathring{U}(a) \varphi(x) > 0$.
 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) - \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_2 - A_1$ По теореме 7.1 имеем $A_2 - A_1 \geq 0$, т.е. $A_1 \leq A_2$. **Теорема доказана.**

Замечания:

- эти две теоремы означают, что при переходе к пределу сохраняется нестрогое неравенство;
- строгое неравенство между функциями **может не сохраниться для пределов.**

Например, для функций $f_1(x) = 0, f_2(x) = x^2$ в любой $\mathring{U}(0)$ выполняется неравенство $0 < x^2$, т.е. $f_1(x) < f_2(x)$. Однако, $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$.

Теорема 7.3. (Теорема о “зажатой” переменной).

Если $\forall x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$, и если

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Доказательство. Для доказательства данной теоремы докажем лемму:

Лемма 7.1. Если $\forall x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство

$$0 \leq \varphi(x) \leq \phi(x), \text{ и если } \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0, \text{ то и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

Доказательство. Требуется доказать, что: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \implies |\varphi(x)| < \varepsilon$.

Имеется: $\forall \delta > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta_0 \implies |\phi(x)| < \varepsilon$

Выберем δ таким, что $\dot{U}_\delta \in \dot{U}(a)$, а также удовлетворяющим неравенству

$$\delta < \delta_0, \text{ из которого следует, что } \dot{U}_\delta \in \dot{U}_{\delta_0}(a).$$

Тогда $\forall x \in \dot{U}(a) \varphi(x) \geq 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(a) 0 \leq \varphi(x) \leq \phi(x) < \varepsilon$, что означает, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0. \text{ Лемма доказана.}$$

Перейдем к доказательству теоремы и обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - f_1(x), \phi(x) = f_2(x) - f_1(x).$$

При этом $\varphi(x), \phi(x)$ удовлетворяют условиям леммы.

Далее, $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = A - A = 0$ и, по лемме, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$.

Наконец,

$$f(x) = \varphi(x) + f_1(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a \text{ (т.к. } \varphi(x) \rightarrow 0, f_1(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a).$$

Таким образом, теорема доказана.

Определение 7.1. Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < x - a < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$, то

говорят, что существует **предел функции $f(x)$ при стремлении x к a справа**

и обозначают это так: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$. Аналогично, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: -\delta <$

$x - a < 0, |f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует **предел функции $f(x)$**

при стремлении x к a слева и обозначают это так: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$.

Теорема 7.4. Функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow a$ предел, равный A , тогда и только тогда, когда он имеет пределы при стремлении x к a справа и слева, причем оба эти предела равны A .

Доказательство. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta$
 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Поскольку из неравенств $0 < x - a < \delta$ и $-\delta < x - a < 0$ следует неравенство $0 < |x - a| < \delta$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$.

Обратно, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x: 0 < x - a < \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon$ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ тогда и только

тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 \forall x: -\delta_2 < x - a < 0, |f(x) - A| < \varepsilon$.

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда если $0 < |x - a| < \delta$, то либо $0 < x - a < \delta \leq \delta_1$, либо $-\delta_2 \leq -\delta < x - a < 0$.

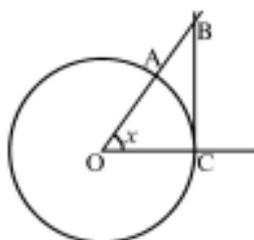
И в том, и в другом случае $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Замечание: разумеется, для пределов справа и слева верны все теоремы об арифметических свойствах предела и о предельном переходе в неравенствах.

Теорема 7.5. (первый замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Замечание: при доказательстве этой теоремы нельзя применять правило Лопиталя, т.к. хотя это и даст верный результат, но будет являться логической ошибкой, потому что при вычислении производной функции $\sin x$ используется, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Доказательство. Функция $\frac{\sin x}{x}$ четная. Поэтому если доказать, что $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то и $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то по **теореме 7.4** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. В определении предела при $x \rightarrow$

$+0$ можно дополнительно требовать выполнение условия $\delta < \frac{\pi}{2}$. В определении требуется существование хотя бы какого-нибудь $\delta > 0$.

Если же мы найдем $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, то, тем самым, хотя бы какое-нибудь $\delta > 0$ будет найдено. Итак, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность единичного радиуса и площади треугольников OAC , OBC и сектора OAC .

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \sin x, \quad S_{OAC \text{ сект}} = \frac{1}{2} x, \quad S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

$$S_{\Delta OAC} < S_{OAC \text{ сект}} < S_{\Delta OBC}, \text{ откуда}$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{что равносильно } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Так как при $x \rightarrow 0$: $1 \rightarrow 1$ и $\cos x \rightarrow 1$, то по теореме 7.3 (о зажатой переменной): $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. **Теорема доказана.**