

Билет 8. Предел монотонной ограниченной последовательности, функции

Эта информация относится ко всем вопросам. Ее следует знать, но не следует рассказывать именно в 8 билете. Ниже приводятся определения бесконечных пределов.

$$f(x) \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall N \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

$$f(x) \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall M \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \forall x < N \Rightarrow f(x) > M$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall N \exists \delta > 0 \forall x: -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < N$$

Определение 8.1. Последовательность $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ называется *неубывающей*, если для всех n выполняется неравенство $a_n \leq a_{n+1}$. Она называется *возрастающей*, если выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$. Последовательность $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ называется *невозрастающей*, если для всех n выполняется неравенство $a_n \geq a_{n+1}$. Она называется *убывающей*, если выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$. Общее название всех таких последовательностей – *монотонные последовательности*.

Определение 8.1'. Функция $f(x)$, определенная на промежутке $X \subset \mathbb{R}$ называется: *неубывающей (возрастающей)* на X , если для всех $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Она называется *невозрастающей (убывающей)* на X , если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Общее название для этих случаев – *монотонные на X функции*.

Теорема 8.10.1. (К. Вейерштрасс)

1. Если последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ не убывает и ограничена сверху, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
2. Если последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ не возрастает и ограничена снизу, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Доказательство. Проведем доказательство первого случая. Вторым случаем совершенно аналогичен. По условию, множество значений, которые принимает последовательность $\{a_n\}$, ограничено сверху. По теореме 3.1 существует его точная верхняя грань A . Докажем, что $a_n \rightarrow A$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению A , любое меньшее число, в частности число $A - \varepsilon$, уже не является верхней гранью множества значений, принимаемых последовательностью $\{a_n\}$. Значит, при некотором $N \in \mathbb{N}$ (вторая "N" - множество натуральных чисел) выполнено $a_N > A - \varepsilon$, или $A - a_N < \varepsilon$. Кроме того, $A - a_N \geq 0$, т.к. A - верхняя грань множества значений $\{a_n\}$.

Итак, $0 \leq A - a_N < \varepsilon$. Но при $n > N$ имеет место неравенство $a_n \geq a_N$, поэтому $0 \leq A - a_n < \varepsilon_N$, т.е. $|a_n - A| < \varepsilon$. Таким образом, для любого ε существует N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Поэтому $a_n \rightarrow A (= \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\})$.

Теорема 8.2. (К. Вейерштрасс)

1. Если $f(x)$ не убывает на (a, b) и ограничена сверху на (a, b) , то существует $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.
2. Если $f(x)$ не убывает на (a, b) и ограничена снизу на (a, b) , то существует $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

3. Если $f(x)$ не возрастает на (a, b) и ограничена сверху, то существует $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

4. Если $f(x)$ не возрастает на (a, b) и ограничена снизу, то существует $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

Доказательство. Оно вполне аналогично теореме 8.1. Для полноты изложения докажем, например, случай 2. Поскольку множество значений, принимаемых $f(x)$ на интервале (a, b) ограничено снизу, существует $\inf_{x \in (a, b)} f(x) = A$. Докажем, что $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению точной нижней грани множества, число $A + \varepsilon$ уже не является нижней гранью множества значений $f(x)$ на (a, b) , поэтому существует такое число c , что $A = f(c) < A + \varepsilon$. Но тогда для всех $a < x < c$ имеем $f(a) \leq f(x) \leq f(c) < A + \varepsilon$, откуда $|f(x) - A| < \varepsilon$. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$ найдено число δ (равное числу $c - a$), такое, что для всех x таких, что $a < x < a + \delta (= c)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$.

Следствие. Если $f(x)$ - монотонная на (a, b) функция, то для любого $x_0 \in (a, b)$ существуют $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 8.2 к интервалам (a, x_0) и (x_0, b) .