## ***Билет 9. Число е***

## **Теорема 9.1. Существует предел последовательности $(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}})^{\boldsymbol{n}}$**

**Доказательство.** Сначала докажем лемму

**Лемма 9.1. (неравенство Бернулли)**. **Если $\boldsymbol{a} \geq -\mathbf{1}$, то $(\mathbf{1}+\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}} \geq \mathbf{1}+\boldsymbol{na}$.**

**Доказательство.** Используем метод математической индукции. При $n = 1$ имеем: $(1+a)^1 = 1 + 1 \cdot a,$

$$1 + a = 1 + a.$$

Предположим, что при $n = k$ неравенство верно: $(1+a)^k \geq 1 + ka$. Тогда при $n = k+1$имеем: $(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$. Неравенство доказано.

Чтобы доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})$, рассмотрим последовательность $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Для членов этой последовательности применим неравенство Бернулли, обозначив $a = \frac{1}{n^2-1}$, при этом очевидно, что $a \geq -1$.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}) = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = (\frac{n^2}{n^2-1})^n \times \frac{n}{n+1}$$

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

Таким образом, $\frac{y_n-1}{y_n} \geq 1$. Так как $y_n > 0$ , то $y_{n-1} \geq y_n$, поэтому рассматриваемая последовательность убывает и ограничена снизу. Значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$ то и $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-1} = 1$. Следовательно,

$\exists \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-1}$.

Таким образом, $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

**<u>Теорема 9.2.</u> Имеет место равенство** $e = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{x}}$**.**

**Доказательство.** *(На экзамене необязательно его знать. Знать надо формулировку. Приведено для интересующихся математикой)*

1. Докажем сначала, что $\lim\limits_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Обозначим за $n$ целую часть отношения $\frac{1}{x}$. $n = \left[\frac{1}{x}\right]$. Тогда справедливо неравенство: $n \le \left[\frac{1}{x}\right] < n + 1$. Перепишем его в виде $\frac{1}{n} \ge x > \frac{1}{n+1}$. Тогда $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + x \le 1 + \frac{1}{n}$. При этом $(1 + \frac{1}{n+1})^n < (1 + x)^{\frac{1}{x}} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} < (1 + x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (1 + \frac{1}{n})$. В полученном неравенстве левая и правая части стремятся к $e$, т.к.$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \to e, \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to 1, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e, \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$ .

Таким образом, по теореме “о зажатой переменной” **7.3** получаем, что $\lim\limits_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

2. Докажем теперь, что $\lim\limits_{x \to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Обозначим $y = -x$. Получаем, что $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = (1 - y)^{-\frac{1}{y}} = (\frac{1}{1-y})^{\frac{1}{y}} = (\frac{1-y+y}{1-y})^{\frac{1}{y}} = (1 + \frac{y}{1-y})^{\frac{1}{y}}$. Выражение $\frac{y}{1-y} \to +0$ при $x \to -0$. Обозначив $t = \frac{1}{1-y}$ получаем, что $t \to +0, y = \frac{t}{t+1}$. Тогда $(1 + \frac{1}{1-y})^{\frac{1}{y}} = (1 + t)^{\frac{t+1}{t}} = (1 + t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1 + t)$. Полученное выражение стремится к $e$ при $t \to +0$, т.к. $(1 + t)^{\frac{1}{t}} \to e, (1 + t) \to 1$. Теорема доказана.