Билет 10. Критерий Коши существования предела последовательности, предела функции.

Определение 10.1. Пусть задана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, ..$ и пусть $1 \le n_1 < n_2 \dots < n_k <..$ - возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, ..$***подпоследовательность*** исходной последовательности $\{a_n\}$.

Теорема 10.1.

Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, ..$ имеет предел A тогда и только тогда, когда любая её подпоследовательность имеет предел, равный A.

Доказательство. Поскольку последовательность сама является одной из своих подпоследовательностей (для которой $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_k = k, \dots$), утверждение теоремы очевидно в одну сторону.

Обратно, из определения подпоследовательности сразу вытекает, что для любого k выполняется неравенство $n_k \ge k$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,то для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. При этом для любой подпоследовательности $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}, ..$ при $k > N$ выполняется неравенство $n_k \ge k > N$, из которого следует, что $\left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = A$.

Теорема 10.2. (Лемма Больцано-Вейерштрасса).

Из любой ограниченной бесконечной последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

Доказательство:

1.) Если множество значений , которые принимает последовательность a_n конечное, т.е. $\{a_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, то хотя бы одно из значений $b_1, \dots b_m$, обозначим его b, принимается бесконечно много раз.

Т.е. существует бесконечное множество номеров

$n = n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$таких, что $a_{n_i} = b, i = 1,2, \dots$. Поэтому $\lim_{k\to\infty} a_{n_i} = A$,

подпоследовательность $\{a_{n_i}, i = 1,2, \dots\}$ - искомая.

(То есть A_1 берется N_1 раз, A_n – N_n раз, всего $N_1 + Nm$

Пусть A_1 принято при $n_1 < n_2 \dots < n_k$, $a_{k_1} = A_1$, $k = 1,2 \dots$

Тогда $\mathop{lim}\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A_1$)

Предел подпоследовательности – частичный предел последовательности. В этом случае частичный предел **не является** предельной точкой множества.

2.) Рассмотрим теперь случай, когда множество значений бесконечно.

Так как множество значений последовательности $\{a_{n_1}\} -$ бесконечное ограниченное множество, то существует предельная точка этого множества, равная A (по теореме 4.1)

Докажем, что предельная точка – частичный предел последовательности.

Существует последовательность $n_1 < \ n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ такая, что $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = A$.

По определению предельной точки (определение 4.1), для $\varepsilon_1 = 1$ существует номер n_1 такой, что $0 < |a_{n_1} - A| < \ \varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, |a_{n_1} - A|\}$. Существует n_2 такое, что $0 < |a_{n_2} - A| < \ \varepsilon_2$. Точка $a_{n_1} \neq a_{n_2}$, т.к. $\varepsilon_2 < |a_{n_1} - A|$, а номер n_2 выбираем так, чтобы выполнялось неравенство $n_2 > n_1$, что можно сделать, так как в любой окрестности предельной точки содержится бесконечное число элементов этого множества. Далее, $\varepsilon_3 = \min(\frac{1}{3}, |a_{n_2} - A|)$. Как и раньше, строим a_{n_3}так, что $|a_{n_3} - A| < \ \varepsilon_3$ и $n_3 > n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_k}, \dots$ такую, что $0 < |a_{n_k} - A| < \ \varepsilon_k$, что означает, что $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $k(\varepsilon)$ и для любого $k > k(\varepsilon)$ выполняется

Пример:

$a_{2k+1} = 1$, а $a_{2k} = \frac{1}{2k}$: 1, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{1}{6}$, тогда:

1 – не предельная точка, а 0 – предельная точка множества и частичный предел последовательности, общего предела нет

$\varepsilon > 0 \quad k(\varepsilon): \frac{1}{2k(\varepsilon)} < \varepsilon \quad k(\varepsilon) > \frac{1}{2\varepsilon}$

Определение 10.2. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***фундаментальной (Коши)***, если для любого положительного ε существует такое $N(\varepsilon)$, что для всех $m, n > N(\varepsilon)$ разность значений a_m, a_n по модулю меньше ε, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \forall m, n > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Теорема 10.3. (Критерий Коши для последовательности).

Предел последовательности существует тогда и только тогда, когда эта последовательность является фундаментальной.

1**) Необходимость** (⇒)

То, что последовательность имеет предел, запишем так: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \mid a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Легко видеть, что $|a_m - a_n| = |(a_m - A) - (a_n - A)|$. По свойству модулей: $|c - d| \leq |c| + |d|$. Обозначив $c = a_m - A, d = a_n - A$, имеем: $|(a_m - A) - (a_n - A) \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е. из существования предела последовательности легко следует ее фундаментальность.

Достаточность (⇐)

Во-первых, из фундаментальности последовательности следует ее ограниченность. Действительно, пусть $\varepsilon = 1$. Тогда существует $N \in \mathrm{N}$ такое, что для всех $m, n > N$ имеет место неравенство $|a_m - a_n| < 1$. Положим $m = N + 1$. Тогда для всех $n > N$ $\left|a_n - a_{N_{+1}}\right| < 1$, т.е. $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$. Пусть $C_0 = \max\{|a_{N+1} - 1|, |a_{N+1} + 1|\}$. Из этих неравенств тогда следует, что при $n > N$ имеем: $|a_n| < C_0$. Положим $C =$

$\max(|a_1|, \dots, |a_N|, C_0)$. Теперь для всех $n \in \mathrm{N}$ имеет место неравенство $|a_n| \leq C$, т.е. $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность.

2) По теореме 10.2 существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что она имеет некоторый предел A, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Докажем, что вся последовательность имеет тот же предел, т.е. что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, для чего достаточно доказать, что

Что $\forall \varepsilon > 0;\ \exists N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \forall \begin{matrix} n > N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ m > N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \end{matrix};\ |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

У нас доказано, что $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0;\ \exists Ko\ \forall k > Ko\left(\frac{\varepsilon}{2}\right); \left|a_{n_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Для $\varepsilon > 0;\ \begin{matrix} N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ Ko\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \end{matrix}\ m = n_k;\ k > Ko\left(\frac{\varepsilon}{2}\right); n_k > Ko\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Поэтому

$|a_n - A| = \left|\left(a_n - a_{n_k}\right) + (a_{n_k} - A)\right| \leq \left|a_n - a_{n_k}\right| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, что и требовалось доказать.

<u>Теорема 10.4. (Критерий Коши для функции).</u>

Условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых x_0, x_1 из $U_б(a)$ разность значений функции $f(x)$ в этих точках по абсолютной величине меньше ε, равносильно тому, что существует предел этой функции при $x \to a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ (\varepsilon) \forall x_0, x_1 \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon$ ***равносильно существованию*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

<u>Необходимость</u> $(\rightarrow)$

Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $x_0, x_1, \in \mathring{U}_\delta(a)$, то $|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $|f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0) - A + A - f(x_1)| \leq |f(x_0) - A| + \left|f(x_{1)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Доказательство достаточности на экзамене не требуется. Оно приведено в отдельном дополнительном файле.