Билет 11. Непрерывность. Точки разрыва. Свойства непрерывных функций

Определение 11.1. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists U(x_0)\ \forall x \in U(x_0)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Для непрерывности в точке x_0 используется обозначение $f(x) \in C(x_0)$.

Теорема 11.1. ***Если функции $\boldsymbol{f_1(x)}$ и $\boldsymbol{f_2(x)}$ непрерывны в точке $\boldsymbol{x_0}$, то сумма, разность, произведение и, если $\boldsymbol{f_2(x) \neq 0}$, то и частное этих функций тоже непрерывны в точке $\boldsymbol{x_0}$.***

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, имеющих пределы.

Теорема 11.2. (Непрерывность сложной функции)

Пусть $\boldsymbol{y = f(x)}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x_0}$, причем $\boldsymbol{y_0 = f(x_0)}$. Пусть $\boldsymbol{z = g(y)}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{y_0}$. Тогда сложная функция $\boldsymbol{g = (f(x))}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x_0}$.

Доказательство: то, что $g(y) \in C(y_0)$, означает: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0: \forall y: |y - y_0| < \eta,\ |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

То, что $f(x) \in C(x_0)$, означает: $\forall\eta > 0\ \exists\delta > 0: \forall x: |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \eta$.

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно сначала выбрать число $\eta > 0$ так, чтобы из неравенства $|y - y_0| < \eta$ следовало неравенство $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Затем по этому числу $\eta > 0$ найдем такое число $\delta > 0$, что как только $|x - x_0| < \delta$, так $|f(x) - f(x_0)| < \eta$. Но тогда и $|g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Несколько сложнее теорема о пределе сложной функции. На экзамене необязательно!

Теорема 11.3. ***Пусть $\boldsymbol{f(x)}$ определена в проколотой окрестности точки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = b}$. Пусть $\boldsymbol{g(y)}$ определена в проколотой окрестности точки $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{\lim\limits_{y\to b} g(y) = c}$.***

Пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. $\boldsymbol{g(y)}$ ***непрерывна в точке*** $\boldsymbol{y_0}$***;***

2. существует такая $\mathring{U}(\boldsymbol{a})$***, что*** $\forall \boldsymbol{x} \in \mathring{U}(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{f(x)} \neq \boldsymbol{b}$***.***

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{g(f(x))}$ ***и этот предел равен с.***

Доказательство похоже на доказательство предыдущей теоремы.

То, что $\lim\limits_{x \to b} g(y) = c$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0: \forall y: 0 < |y - b| < \eta, |g(y) - c| < \varepsilon$.

То, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ означает, что $\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0: \forall x: 0 < |x - a| < \delta, |f(x) - b| < \eta$.

Если потребовать, чтобы в некоторой $\mathring{U}(a)$ $f(x) \neq b$, то тогда можно по произвольному $\varepsilon > 0$ найти сначала число $\eta > 0$ такое, что если $0 < |y - b| < \eta$, то $|g(y) - c| < \varepsilon$. Теперь по этому η находим $\delta > 0$ так, чтобы из $0 < |x - a| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - b| < \eta$. Пересекаем проколотые окрестности $\mathring{U}(a)$ и $\mathring{U}_\delta(a)$. Это пересечение содержит некоторую проколотую окрестность точки a, и, если x принадлежит этой окрестности, то $f(x) \neq b$ и $|f(x) - b| < \eta$, т.е. $0 < |f(x) - b| < \eta$, следовательно, $\left|g\big(f(x)\big) - c\right| < \varepsilon$. В этом случае теорема доказана. Если же $g(y) \in C(b)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0: \forall y: |y - b| < \eta,\ |g(y) - c| < \varepsilon$, поэтому выбирая по $\varepsilon > 0$ соответствующее $\eta > 0$, а потом по этому η – соответствующее число $\delta > 0$ получаем, что как только $0 < |x - a| < \delta$, так $|f(x) - b| < \eta$ и, значит, $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$.

Примечание 1: обычно при вычислении пределов мы используем монотонные замены переменной и условие 2 выполняется.

Примечание 2: если не выполняется ни одно из условий, то может оказаться, что предел $\lim\limits_{x \to a} g(f(x))$ не существует, либо существует, но не равен *c*.

Первая ситуации встречается в таком примере:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{если } x = \dfrac{p}{q}, \text{где } \dfrac{p}{q} - \text{несократимая дробь,} \\ 0, \text{если } x - \text{иррациональное число;} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, \text{если } y \neq 0, \\ 0, \text{если } y = 0. \end{cases}$$

При стремлении x к *0* функция $f(x)$ имеет пределом число *0*. При стремлении y к *0* функция $g(x)$ имеет предел, равный *1*.

Однако функция $g(f(x)) = \begin{cases} 1, \text{если } x - \text{рациональное число}, \\ 0, \text{если } x - \text{иррациональное число}; \end{cases}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Пример второй ситуации более простой. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0; \end{cases}$

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Пусть $g(y) = \begin{cases} 1, \text{если } y \neq 0, \\ 0, \text{если } y = 0. \end{cases}$ Тогда $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$.

Однако $g(f(x)) = \begin{cases} g(0) = 0, \text{если } x \neq 0, \\ g(1) = 1, \text{если } x = 0. \end{cases}$ Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 0$.

Определение 11.2. Если функция не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что она ***разрывна*** в этой точке.

При этом предполагаем, что либо x_0 является точкой из области определения, либо она является предельной точкой области определения. Точки разрыва бывают двух видов.

Определение 11.3. ***Точкой устранимого разрыва*** называется такая точка x_0, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, но при этом значение $f(x_0)$ либо не определено, либо $f(x_0) \neq A$. В первом случае можно доопределить функцию в точке x_0, во втором – переопределить функцию так, чтобы получилась непрерывная функция.

Поясним сказанное примерами:

1. Пусть $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Эта функция не определена в точке $x = 0$, но её предел при $x \to 0$ существует и равен *1*(теорема 9.5).

Поэтому можно доопределить функцию $f(x)$, рассмотрев функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{при } x \neq 0, \\ 1, \text{при } x = 0. \end{cases}$$

По определению, функция $f^*(x)$ – непрерывна в *0*.

2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, \text{если } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0. \end{cases}$

Переопределим функцию в точке $x = 0$, положив $f^*(x) = x = 0$.

Получилась непрерывная функция $f^*(x) = x$.

И в том, и в другом примере разрыв удалось устранить.

__**Определение 11.4.**__ ***Точкой разрыва первого рода*** называется точка x_0, в которой существуют $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_2$, причем $A_1 \neq A_2$.

Например, функция $sign(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x > 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \\ -1, \text{если } x < 0 \end{cases}$ обладает разрывом первого рода в точке *0*.

Замечание: по следствию теоремы Вейерштрасса монотонная в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$. Поэтому она либо непрерывна в точке x_0, когда оба эти предела равны друг другу, либо имеет в ней разрыв первого рода, когда эти пределы различные.

__**Определение 11.5.**__ Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ не существует, или бесконечен, то говорят, что x_0– ***точка разрыва второго рода***.