Билет 12. Непрерывность элементарных функций.

12.1. Непрерывность многочленов.

Так как функция $y = x$ непрерывна в любой точке, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций, функция $y = x^2$ – непрерывна. Последовательно применяя вышеупомянутую теорему, получаем, что для любого натурального m функция $y = x^m$ – непрерывна. Умножая непрерывные функции $e = x, x^2, x^3, \dots, x^k$ на постоянные числа $c_1, c_2, \dots, c_k$ соответственно, получаем, что $c_1x, c_2x^2, \dots, c_kx^k$ – непрерывные функции. Сложив $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k$, получаем непрерывную функцию. Итак, многочлен – непрерывная на всей прямой функция.

12.2. Непрерывность рациональной функции.

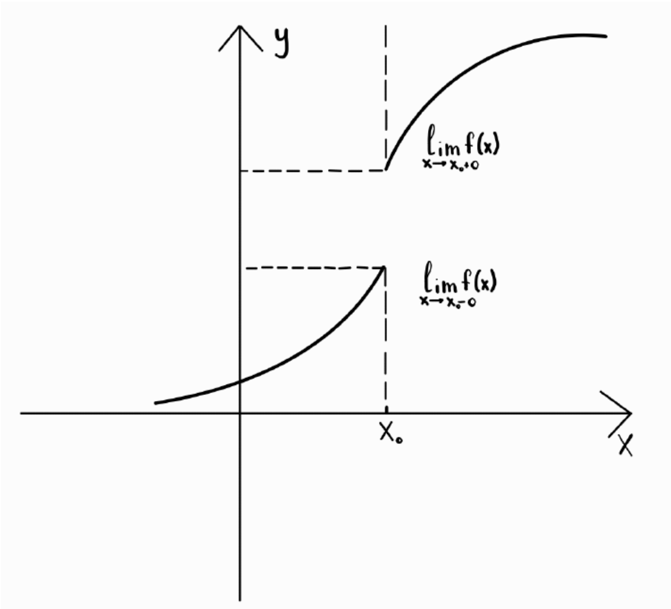
По определению, рациональной функцией $R(x)$ называется отношение двух многочленов, $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Во всех тех точках x_0, где $Q(x_0) \neq 0$, функция $R(x)$ непрерывна по теореме о непрерывности частного. Если же в точке x_0 выполняется равенство $Q(x_0) = 0$, то в этой точке может быть устранимый разрыв (например, в точке $x_0 = 1$ у функции $R(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+4)}{(x-1)(x^2+x+5)}$). Кроме того, в этой точке может оказаться разрыв второго рода, как, например, в точке $x_0 = 0$ у функции $R(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$. Для дальнейшего исследования будет полезной следующая теорема.

Теорема 12.1.

Пусть $y = f(x)$ возрастает (или убывает) на промежутке X, причём множество её значений образует промежуток Y. Тогда $f(x)$ – непрерывная на X функция.

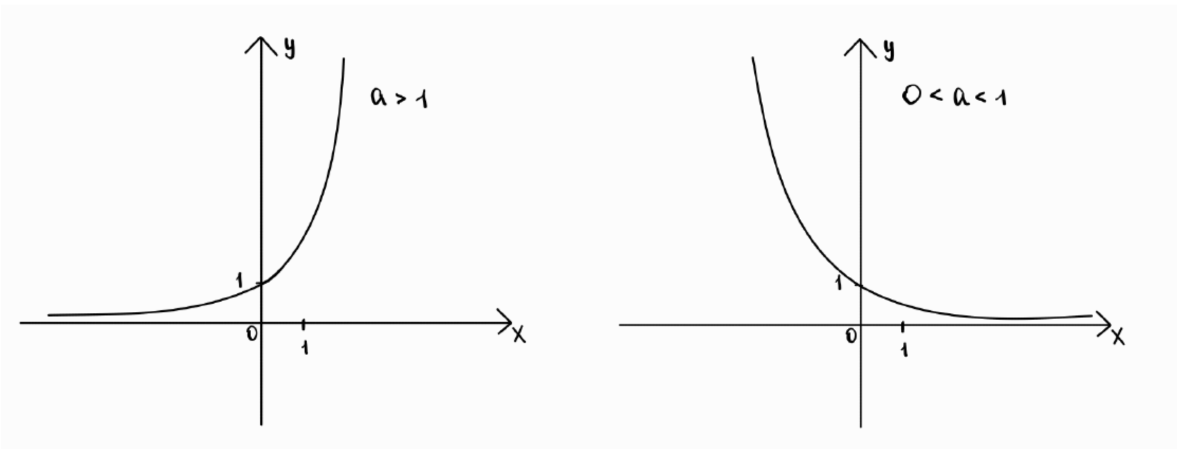
Доказательство.

Вспомним, что если $f(x)$ строго монотонна на промежутке X, то, согласно следствию теоремы Вейерштрасса, в любой внутренней точке x_0 этого промежутка существуют $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Если эти числа равны друг другу, то они, ввиду монотонности, равны $f(x_0)$ и $f(x) \in C(x_0)$. Если же эти значения не равны друг другу, то во множестве значений Y функции $f(x)$ имеется "пробел" между точками $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$, опять же ввиду монотонности $f(x)$. Но, по условию, множество значений Y образует промежуток, в котором не может быть "пробелов" по определению промежутка. Теорема доказана.



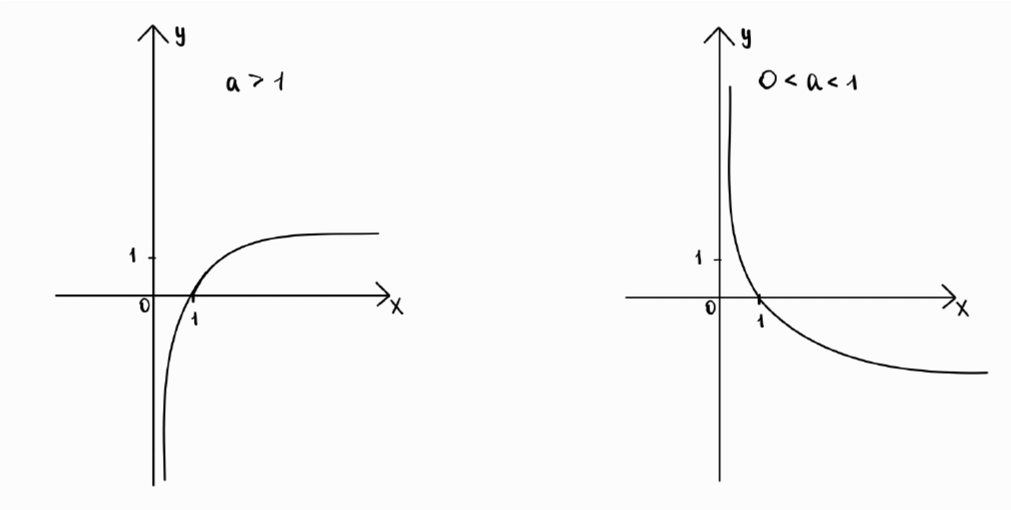
12.3. Непрерывность показательной функции.

Функция $y = a^x$ монотонна (возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$) и множеством ее значений при $x \in \mathbb{R}$ является бесконечный промежуток – множество всех положительных чисел. По доказанной теореме, функция $y = a^x$ непрерывна на всей числовой оси.



12.4. Непрерывность логарифмической функции.

Функция $\log_a x$ монотонна (возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$) и при $x \in (0, +\infty)$ ее множеств значений есть $\mathbb{R}$. По доказанной теореме, $y = \log_a x$ непрерывна на $(0, +\infty)$.



12.5. Непрерывность функции $y = x^{\mu}$.

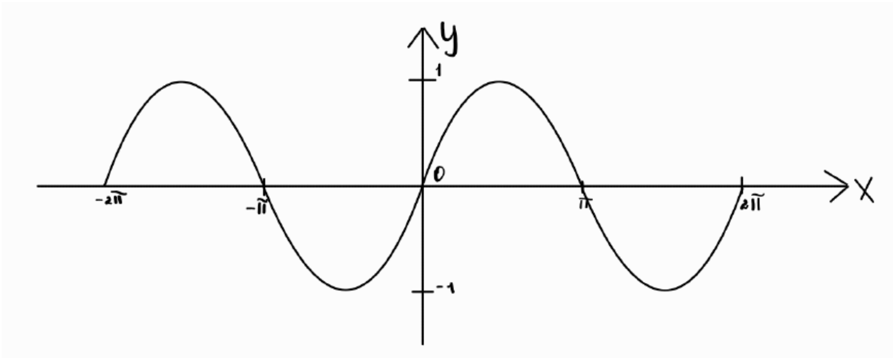
Функция $y = x^{\mu}$ определена при $x > 0$, причем $x^{\mu} = e^{\mu \ln x}$. По доказанному, $z = \mu ln x$ - непрерывная функция при $x > 0$, функция $y = e^{z}$ непрерывна при всех z, поэтому, по теореме о непрерывности сложной функции, $y = x^{\mu}$ - непрерывная при $x > 0$ функция.

12.6. Функция $y = \ sin\, x$.

При вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ было установлено, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $0 < sinx < x$. Ввиду нечетности функций $y = x$ и $y = sinx$, при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $-x < -\sin x < 0$. Из этого сразу следует, что при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $|\sin x| < |x|$. Пусть x_0 произвольная точка.

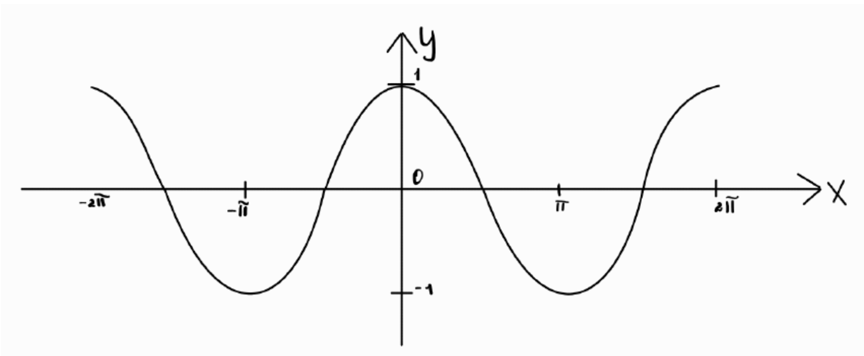
Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

Это равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$. В свою очередь, это равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to x_0} 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2} = 0$. Так как, по доказанному выше, $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < \left|\frac{x-x_0}{2}\right|$, $\lim\limits_{x\to x_0} \sin\frac{x-x_0}{2} = 0$ Кроме того, функция $2\cos\frac{x+x_0}{2}$, очевидно, ограниченная. По свойствам бесконечно малых, получаем требуемое.



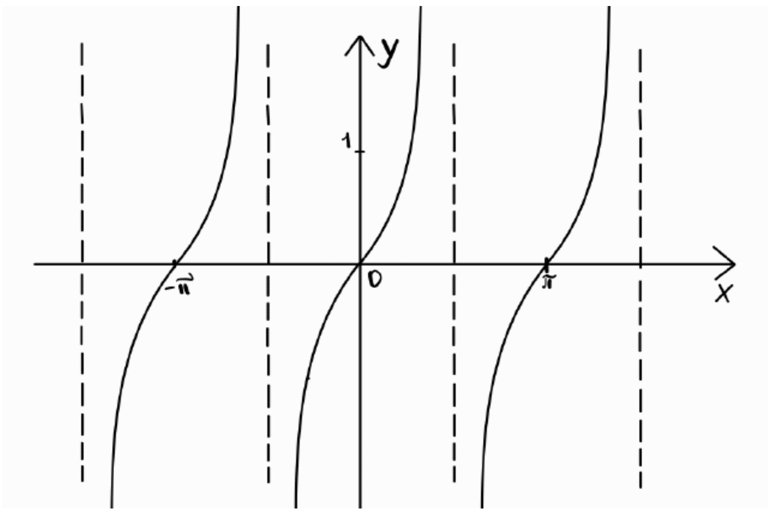
12.7. Функция $y = \cos x$.

Она непрерывна исходя из теоремы о непрерывности сложной функции, так как $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $z = \frac{\pi}{2} - x$ – непрерывная функция и $y = sinz$ – тоже непрерывная функция.



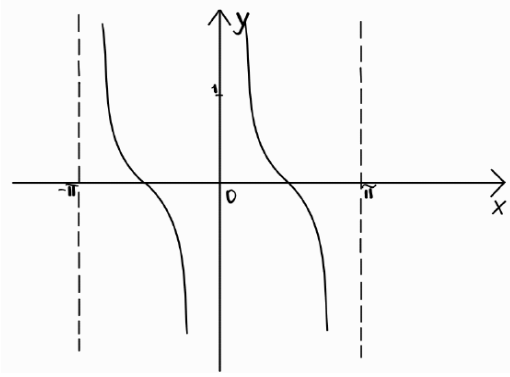
12.8. Функция $y = tgx$.

Эта функция непрерывна во всех точках, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. В этих, последних, она имеет разрыв второго рода.



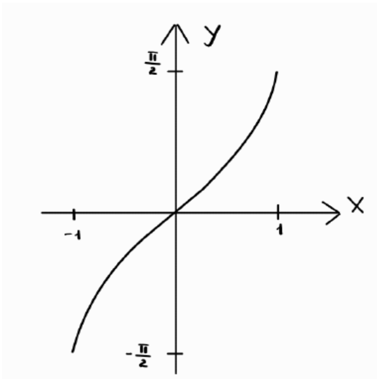
12.9. Функция $y = ctgx$.

Эта функция непрерывна во всех точках, кроме точек $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, где она имеет разрыв второго рода.



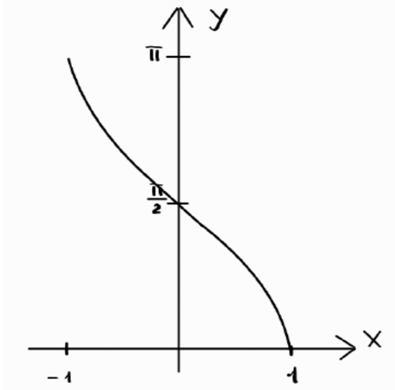
<u>12.10. Непрерывность функции $y = arcsinx$</u>.

Она определена на отрезке $[-1; 1]$, возрастает на нём и множеством её значений является отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. По доказанной теореме 12.1, $y = arcsinx$ непрерывна на $[-1; 1]$.



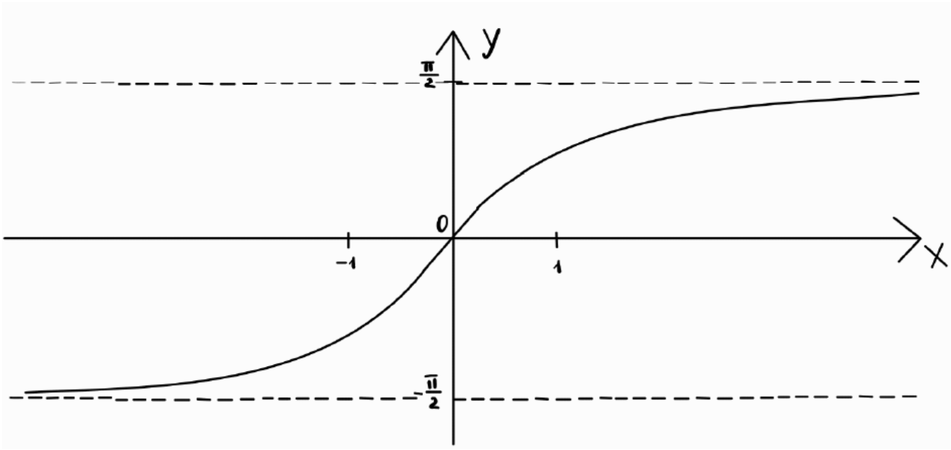
<u>12.11. Непрерывность функции y = arccos x</u>.

Следует из тождества $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$, т.е. $arccosx = \frac{\pi}{2} - arcsinx$ - функция, также непрерывная на [-1, 1].



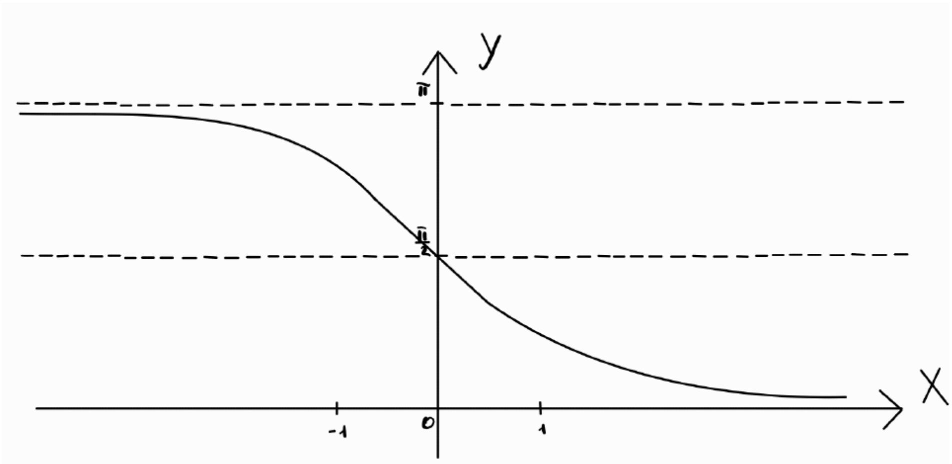
<u>12.12. Непрерывность функции $y = arctgx$</u>.

Функция определена и возрастает на всей числовой прямой. Множество значений – интервал $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Поэтому функция $y = arctgx$ непрерывна на всей числовой прямой.



12.13. Непрерывность функции $y = arcctgx$.

Следует из равенства: $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$.



Здесь уместно добавить информацию об обратных функциях

12.14. Обратная функция.

Если задана функция $y = f(x)$, обладающая тем свойством, что любое своё значение y она принимает при единственном значении x, то это даёт возможность рассматривать **обратную функцию** $x = g(y)$, такую, что равенства $y = f(x)$ и $x = g(y)$ равносильны (например, $y = e^{x}$, $x = \ln y$).Очевидно, что обе функциональные зависимости, $y = f(x)$ и $x = g(y)$ определяют одну и ту же кривую на плоскости. Часто рассматривают функцию $x = g(y)$ (и именно эту функцию называют обратной). График такой функции получается из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно биссектрисы первого координатного угла.

Теорема 12.2.

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X. Тогда на промежутке Y, представляющем собой множество её значений (это будет доказано в теореме 15.3), определена обратная функция $x = g(y)$, которая также возрастает (убывает) и непрерывна.

Доказательство.

Ограничимся случаем возрастания. По определению множества значений функции, для любого $y_0 \in Y$ существует число $x_0 \in X$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Так как $y = f(x)$ возрастает на X, то для любого $x \in X$, $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Поэтому любое своё значение $y \in Y$ функция $y = f(x)$ принимает ровно один раз, в точке $x \in X$, что и позволяет определить функцию $x = g(y)$ такую, что для любого $y_0 \in Y$ существует число $x_0 \in X$ такое, выполняется равенство $x_0 = g(y_0)$. Легко видеть, функция $x = g(y)$ возрастает на Y. Действительно, как показано выше, для любого $y_0 \in Y$ значения $y > y_0$ соответствуют значениям $x > x_0$. Но это означает, что и обратно, для любого $x_0 \in X$ значения $x > x_0$ соответствуют значениям $y > y_0$. Наконец, для доказательства непрерывности $x = g(y)$ на промежутке Y воспользуемся теоремой 12.1. Действительно, функция $x = g(y)$ возрастает на промежутке Y и её множество значений образует промежуток X.