Билет 13. Символы о, О. Вычисление $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}$

Пусть $f(x)$, $g(x)$ определены в $\mathring{U}(a)$.

Определение 13.1. $f(x)=o\big(g(x)\big), x\to a$, если существует $\alpha(x)$, $\alpha(x)$– б.м.ф. при $x\to a$, такая, что $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$.

Определение 13.2. $f(x)=O\big(g(x)\big)$, $x\to a$, если существует $\beta(x)$, $\beta(x)$ - функция ограниченная в $\mathring{U}(a)$, такая, что $f(x)=\beta(x)\cdot g(x)$.

Если $m>n$ и $x\to 0$, то $x^m=o(x^n)$ и если $m>n$ и $x\to\infty$, то $x^m=o(x^n)$. Например,

1) $x^2=o(x)$ при $x\to 0$, т.к. $x^2=x\cdot x$, а $x\to 0$;

2) $x=o(x^2)$, при $x\to\infty$, т.к. $x=x^2\cdot\frac{1}{x}$, и $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

Из свойств бесконечно малых величин следуют такие свойства символов о, О:

Теорема 13.1. ***Если $\boldsymbol{f_1(x)=o(g(x))}$, $\boldsymbol{f_2(x)=o(g(x))}$, то, $\boldsymbol{f_1(x)+f_2(x)=o\big(g(x)\big)}$, $\boldsymbol{f_1(x)\cdot f_2(x)=o\left(g^2(x)\right)}$; все соотношения справедливы при $\boldsymbol{x\to a}$.***

Доказательство: действительно, $f_1(x)=\alpha_1(x)\cdot g(x)$, $f_2(x)=\alpha_2(x)\cdot g(x)$, $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – б.м.ф. при $x\to a$ и $f_1(x)+f_2(x)=\{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\}\cdot g(x)$, а $f_1(x)\cdot f_2(x)=\{\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)\}\cdot g^2(x)$. В фигурных скобках стоят бесконечно малые при $x\to a$.

Теорема 13.2. ***$\boldsymbol{o(o(g(x)))=o(g(x))}$, т.е. если $\boldsymbol{f(x)=o(o(g(x)))}$, то $\boldsymbol{f(x)=o(g(x))}$ при $\boldsymbol{x\to a}$.***

Доказательство: действительно, если $f(x)=o(\varphi(x))$, а $\varphi(x)=o(g(x))$, т. е. $f(x)=\alpha_1(x)\cdot\varphi(x)$, $\varphi(x)=\alpha_2(x)\cdot g(x)$, где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, – б.м.ф. при $x\to a$, то $f(x)=\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)\cdot g(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x\to a$, что и означает справедливость исходного равенства.

Для большей ясности повторим, что равенство следует понимать так: если $f(x)=o(o(g(x)))$, то $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to a$.

Теорема 13.3. $O(o(g(x))) = o(g(x))$, $o(O(g(x))) = o(g(x))$, $x \to a$.

Доказательство: эти свойства сразу следуют из того, что произведение бесконечно малой величины на ограниченную есть бесконечно малая величина.

Символы o, O удобны при вычислении пределов.

Перейдём к вычислению пределов $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}$, которые далее будут использованы при вычислении производных.

Вновь подчеркнём, что ***при вычислении указанных пределов на экзамене нельзя пользоваться правилом Лопиталя или формулой Тейлора.*** Разумеется, они дадут верный ответ, но их применение требует знания производных функций, стоящих в числителях этих дробей. А для вычисления этих производных, как отмечено выше, требуется знать эти самые пределы. Поэтому получится не доказательство, а порочный логический круг.

Теорема 13.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$.

Доказательство:

1. в теореме 9.2 мы установили, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Рассмотрим левую часть этого равенства и преобразуем её так: $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}ln(1+x)}$. Используя непрерывность показательной функции (непрерывность функции означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x) = f(x_0)$), получаем $e^{\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}ln(1+x)}} = e$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$, что и требовалось доказать.

2. Далее рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ и сделаем в нём замену переменной $x = \ln(1+t)$ (это – монотонная замена и теорема о пределе сложной функции будет верна). При $x \to 0$ и $t \to 0$, и наоборот, при $t \to 0$ также $x \to 0$.

Поэтому $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{ln(1+t)}-1}{ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1+t-1}{ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{ln(1+t)} = 1$, по доказанному выше.

Для $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{xlna}-1)lna}{xlna} = lna.$

3. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$. Обозначим $(1+x)^{\mu}-1 = y$, т. е. $(1+x)^{\mu} = y+1$. Тогда $ln(1+x)^{\mu} = ln\,(y+1)$, $\mu\, ln(1+x) = ln\,(y+1)$ и при $x \to 0$ переменная $y \to 0$, и наоборот, при $y \to 0$ переменная $x \to 0$. Наш предел примет вид $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x,y\to 0}\frac{y}{x}\cdot\frac{ln(1+y)}{ln(1+y)}$. Это преобразование законное, т. к. при $x \neq 0$ и $y \neq 0$, поэтому $ln\,(1+y) \neq 0$. Далее используем доказанное в первом пункте равенство. Таким образом, искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mu ln(1+x)}{x}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{ln(1+y)} = \mu.$

Запишем найденные предельные соотношения с помощью символа o. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$ означает, что $\frac{ln(1+x)}{x} = 1+\alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$ или, $ln(1+x) = x + \alpha(x)\cdot x = x + o(x)$, $x \to 0$.

Равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$, означает, что $a^x = 1 + xlna + o(x), x \to 0$.

Аналогично, $(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + o(x)$, $x \to 0$.

Кстати, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$ означает, что $sinx = x + o(x)$ при $x \to 0$.