Билет 14. Промежуточные значения непрерывной на отрезке функции

Определение 14.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Если она непрерывна в каждой точке этого множества, то говорят, что она ***непрерывна на множестве*** $X \subset \mathbb{R}$. Иными словами, функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве $X \subset R$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $a \in X$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Теорема 14.1 (Теорема Больцано-Коши).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство: пусть, для определённости, $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$. Обозначим $a_1 = a, b_1 = b$ и рассмотрим точку $(a_1 + b_1)/2 = c_1$. Если оказалось, что $f(c_1) = 0$, то теорема верна при $c = c_1$. Если же $f(c_1) \neq 0$, то либо $f(c_1) > 0$ и в этом случае положим $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$, либо $f(c_1) < 0$ и в этом случае положим $a_2 = c_1$, $b_2 = b$. В обоих случаях получен отрезок $[a_2; b_2]$, длина которого равна половине длины отрезка $[a_1; b_1]$, и на концах которого функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков.

Разделим этот отрезок пополам точкой $(a_2 + b_2)/2 = c_2$. Если $f(c_2) = 0$, то теорема верна при $c = c_2$. Если же $f(c_2) \neq 0$, то либо $f(c_2) > 0$ и в этом случае положим $a_3 = a_2$, $b_3 = c_2$, либо $f(c_2) < 0$ и в этом случае положим $a_3 = c_2$, $b_3 = b_2$. Снова в обоих случаях получен отрезок $[a_3; b_3]$, длина которого равна половине длины отрезка $[a_2; b_2]$, и на концах которого функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков.

Продолжим процесс деления отрезков пополам. При этом возможны два случая. Либо на каком-то шаге получаем, для $(a_n + b_n)/2 = c_n$, и $f(c_n) = 0$. Тогда теорема справедлива. Либо для всех n выполняются неравенства $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Тогда получается бесконечная система стягивающихся отрезков. Действительно, по построению каждый следующий отрезок вложен в предыдущий, а длина отрезка $[a_n, b_n]$, равная $(b - a) / 2^n$, стремится к нулю при $n \to \infty$. Эти отрезки имеют общую точку, которую будем обозначать c. Докажем, что $f(c) = 0$.

Действительно, с одной стороны, $c = \lim_{n\to\infty} a_n$, поэтому, по теореме о предельном переходе в неравенствах, $f(c) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$, так как функция $f(x)$ по условию непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a_n) < 0$. С другой стороны, $f(c) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$, так как $f(b_n) > 0$. Полученные неравенства доказывают, что $f(c) = 0$.#

Следствие: пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A, f(b) = B$ и пусть $A < B$ (или $A > B$). Тогда для любого числа C, удовлетворяющего неравенствам $A < C < B$ (или $A > C > B$), существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = C$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на отрезке $[a, b]$, как разность непрерывной по условию функции $y = f(x)$ и постоянной функции. $F(a) = f(a) - C = A - C = A - C < 0$, $F(b) = f(b) - C = B - C > 0$, поэтому существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F(c) = 0$, т. е. $f(c) = C$.