***<u>Билет 15. Ограниченность непрерывной на отрезке функции.</u>***

**<u>Теорема 15.1 (Вейерштрасс).</u>**

***Пусть функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a,\ b]$***. Тогда она ограничена на этом отрезке.***

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Предположим, что $y = f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,\ b]$. Это означает, что для любого числа $C > 0$ существует точка $x\in[a,\ b]$ такая, что $|f(x)| > C$. Последовательно выбирая число $C > 0$ равным числам $1,\ 2,\ ...,\ n,\ ...$, находим соответствующие точки $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...$ такие, что $\left|f(x_n)\right| > n$. Эти точки образуют бесконечную последовательность, а так как все они принадлежат отрезку $[a,\ b]$, т.е. $a\le x_n\le b$, эта последовательность является ограниченной. Применяем теорему Больцано-Вейерштрасса для последовательностей, согласно которой существует подпоследовательность $(x_{n_k})$ последовательности $(x_n)$, сходящаяся к некоторому пределу, который будем обозначать $c$. Так как $a\le x_{n_k}\le b$, по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем: $a\le c\le b$, т.е. $c\in[a,\ b]$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке. Но это означает, что для любой последовательности, в частности, и для последовательности $(x_{n_k})$, стремящейся к $c$, последовательность соответствующих значений $(f\left(x_{n_k}\right))$ должна стремиться к $f(c)$. Но $\left|f(x_{n_k})\right| > n_k > k$, поэтому последовательность $(f\left(x_{n_k}\right))$ стремится к $\infty$. Получено противоречие с предположением о неограниченности $y = f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

**Замечание:** если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a,\ b)$, то она может быть неограниченной на этом интервале. Например, функция

$f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале (0, 1) непрерывна. Однако для любого числа $C > 0$ имеет место неравенство $C + 1 > 1$, откуда $0 < \frac{1}{(C+1)} < 1$ и значение этой функции в точке $x = \frac{1}{C+1}$ равно $C + 1 > C$.

**Следствие.** ***Пусть функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a, b]$**.** ***Тогда существуют точная верхняя грань*** $M$ ***и точная нижняя грань*** $m$ ***множества её значений на отрезке*** $[a, b]$**.**

Достаточно применить к множеству значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ теорему о существовании точных граней ограниченного множества.

**Теорема 15.2 (Вейерштрасс).**

***Пусть функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a, b]$**.** ***Тогда существуют такие точки c, d, принадлежащие этому отрезку, что*** $f(c) = M, f(d) = m$**.**

Докажем часть утверждения теоремы, относящуюся к точной верхней грани $M$ множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Остальная часть доказывается аналогично.

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Пусть для всех точек $x$ отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $f(x) < M$. Тогда $M - f(x) > 0$ для всех точек $x$ отрезка $[a, b]$ и функция $y = \frac{1}{(M-f(x))}$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. По теореме 15.1 эта функция ограничена на отрезке $[a, b]$, следовательно, существует число $C > 0$ такое, что для всех точек $x$ отрезка $[a, b]$ выполняются неравенства $0 < \frac{1}{M-f(x)} < C$. Но тогда для всех точек $x$ из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $M - f(x) > \frac{1}{C}$, или $M - \frac{1}{C} > f(x)$. Это означает, что меньшее, чем $M$, число $M - \frac{1}{C}$ является верхней гранью множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Значит, $M$ - не точная верхняя грань множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

**Замечание:** часто эту теорему формулируют так:

***Непрерывная на отрезке функция принимает свои наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке.***

**Следствие.** ***Пусть функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a,\ b]$***. Тогда для любого числа*** μ***, удовлетворяющего неравенствам*** $m \leq \mu \leq M$***, существует точка*** $\xi \in [a, b]$ ***такая, что*** $f(\xi) = \mu$***.***

По доказанной теореме, существуют такие точки $c, d$ , принадлежащие отрезку $[a,\ b]$, что $f(c) = M$, $f(d) = m$. Рассмотрим отрезок числовой оси, соединяющий эти точки. Пусть, для определённости, $c < d$. Тогда функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[c,\ d]$. По следствию теоремы 151, для любого μ, удовлетворяющего неравенствам, $m \leq \mu \leq M$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$.

**Замечание:** Доказанные утверждения означают, что непрерывная на отрезке функция принимает на нём все свои значения, от наименьшего до наибольшего. Разумеется, таким свойством могут обладать не только непрерывные функции. Например, функция $y = \begin{cases} x,\ если\ 0 \leq x \leq 1 \\ -x - 1,\ если\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$ принимает все значения от $-1$ до $+1$, однако имеет разрыв в точке $x = 0$.

Отметим ещё одно важное следствие теоремы 15.2.

__Теорема 15.3.__ ***Пусть функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна на промежутке*** $X$ ***(конечном или бесконечном). Тогда множество её значений*** $Y$ ***также представляет собой промежуток.***

Требуется доказать, что вместе с любыми двумя точками $y_1, y_2 \in Y$ любая точка $y, y_1 \leq y \leq y_2$, также принадлежит $Y$. Пусть $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Рассмотрим множество значений функции $y = f(x)$ на отрезке $\left[x_1, x_2\right]$ ($\left[x_1, x_2\right] \subset X$, т.к. $X$- промежуток). Оно представляет собой отрезок, в котором содержится отрезок $\left[y_1, y_2\right]$. Таким образом, любое число $y, y_1 \leq y \leq y_2$ является значением $y = f(x)$для некоторого $x \in X$.