Билет 16. Равномерная непрерывность.

Определение 16.1. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Функция $f(x)$называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in X$ и $x_0 \in X$ удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(Сверху – своя δ для всех x_0, снизу одна δ на все x)

Замечание: есть важное различие между понятиями равномерной непрерывности на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и непрерывности на этом множестве. Из равномерной непрерывности следует непрерывность, но не наоборот. В определении равномерной непрерывности содержится сильное требование о том, чтобы входящее в определение число $\delta > 0$ зависело только от числа $\varepsilon > 0$. В обычном определении непрерывности на множестве (определение 16.1) это число $\delta > 0$ зависит не только от числа $\varepsilon > 0$, но ещё и от точки $a \in X$. Поэтому возможно, что общего значения числа $\delta > 0$, одновременно пригодного для всех $x_0 \in X$, найти не удастся. Однако если в качестве множества $X \subset \mathbb{R}$ рассматривается отрезок числовой оси, то верна такая теорема.

Теорема 16.1 (Кантор)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $C[a, b]$. Тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Отсутствие равномерной непрерывности означает, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого числа δ существуют точки $x \in [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, для которых выполнены неравенства $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Зафиксируем это число $\varepsilon > 0$ и будем последовательно выбирать $\delta_n = \frac{1}{n}$.

При каждом таком выборе числа $\delta > 0$ существуют точки $x_{0_n}, x_n, \ldots$ такие, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства $\left|x_n - x_{0_n}\right| < {}^{1}\!/_{n}$ и $\left|f(x_n) - f(x_{0_n})\right| \geq \varepsilon$.

Последовательность точек (x_{0_n}) - бесконечная и ограниченная. Поэтому, по лемме Больцано-Вейерштрасса (теорема 10.2), существует подпоследовательность $\left(x_{0_{n_k}}\right)$, имеющая предел, который будем обозначать С.

Далее, из неравенства $\left|x_n - x_{0_n}\right| < {}^1/_n$ при $n = n_k$ получаем:

$$\left|x_{n_k} - x_{0_{n_k}}\right| < {}^1/_{n_k} < {}^1/_k, \quad \text{т.е.} \quad x_{0_{n_k}} - {}^1/_{n_k} < x_{n_k} < x_{0_{n_k}} + {}^1/_{n_k}.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} x_{0_{n_k}} = \mathrm{C}$, $\lim\limits_{k\to\infty} {}^1/_{n_k} = 0$, правая и левая части этих неравенств имеют одинаковые пределы, равные числу С. По теореме 9.3 из этого следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \mathrm{C}$. Так как $a \le c_{n_k} \le b$, по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем: $a \le d \le b$, т.е. $d \in [a, b]$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке. По выбору точек $x_{n_k}, x_{0_{n_k}}$ выполнено неравенство $\left|f\left(x_{n_k}\right) - f(x_{0_{n_k}})\right| \ge \varepsilon$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$. Ввиду непрерывности модуля и непрерывности функции $y = f(x)$, получаем $\varepsilon \le \lim\limits_{k\to\infty} \left|f\left(x_{n_k}\right) - f(x_{0_{n_k}})\right| = \left|\lim\limits_{k\to\infty} (f\left(x_{n_k}\right) - f\left(x_{0_{n_k}}\right))\right| = \left|f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) - f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{0_{n_k}})\right| = |f(\mathrm{C}) - f(\mathrm{C})| = 0$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание: Функция, непрерывная на интервале (a, b), не обязательно равномерно непрерывна на нём (необязательно выполнение т. Вейерштрасса). Пример: функция $f(x) = {}^1/_x$, непрерывная на интервале $(0,1)$, не равномерно непрерывна на этом интервале.

Тогда: $\exists \varepsilon > 0,$ для любого δ существуют x, x_0 такие, что $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon$

Для доказательства выберем $\varepsilon = 1$ и для любого $0 < \delta < 1$ рассмотрим точки $x = {}^\delta/_2$, $x_0 = \delta$. При этом $|x - x_0| = {}^\delta/_2 < \delta$, но $\left|{}^2/_\delta - {}^1/_\delta\right| = {}^1/_\delta > 1$.