

Билет 17. Производная, её естественнонаучный смысл и основные свойства.

17.1. Дифференцируемость функции.

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 .

Определение 17.1. Числовую функцию f называют *дифференцируемой* в точке x_0 , если для всех $x \in U(x_0)$ имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad (1)$$

где число k не зависит от x , а $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и бесконечно малая функция $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0 , т.е. $\alpha(x_0) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$.

Числовую функцию f называют *дифференцируемой* на множестве X , если f дифференцируема в каждой точке $x_0 \in X$.

Пример 1. *Линейная* функция $f(x) = kx + b$ дифференцируема на всей числовой прямой.

Действительно, $kx + b = kx_0 + b + k(x - x_0) + 0 \cdot (x - x_0)$,

($k = k, \alpha(x) = 0$). В частности, *постоянные* ($k = 0$) и *тождественная* функция ($k = 1, b = 0$) дифференцируемы.

Пример 2. Квадратичная функция $f(x) = x^2$ дифференцируема.

Действительно, $x^2 = (x_0 + (x - x_0))^2 = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)(x - x_0)$,
 $k = 2x_0, \alpha(x) = x - x_0$.

Теорема 17.1.

Функция f , дифференцируемая в точке x_0 , непрерывна в этой точке.

Доказательство. В силу формулы (1), $f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Пример функции $|x|$ (чуть позже мы докажем, что эта функция не дифференцируема в точке $x = 0$), показывает, что утверждение, обратное теореме 1, неверно.

17.2. Производная.

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 . Поскольку на множестве $\dot{U}(x_0)$ определена функция $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и x_0 - предельная точка для $\dot{U}(x_0)$, то можно ставить вопрос о существовании предела *разностного отношения* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ в точке x_0 .

Определение 17.2. Число $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (если оно существует) называют *производной функции* f в точке x_0 и обозначают символом $f'(x_0)$.

Итак, $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при условии, что предел существует.

Для обозначения производной также используется символ $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Например, скорость прямолинейного движения есть производная перемещения как функции времени. Часто полезно, по аналогии с этим, трактовать и *производную любой функции f в точке x_0* как скорость изменения функции в этой точке. Пример – скорость химической реакции.

Пример 1'. Линейная функция $f(x) = kx + b$ имеет производную в каждой точке, и ее производная $(kx + b)' = k$ – постоянная.

Действительно, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(kx+b)-(kx_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$.

В частности, *постоянная имеет всюду производную, равную нулю, а тождественная функция – производную, равную единице.*

Пример 2'. Квадратичная функция $f(x) = x^2$ имеет производную в каждой точке, и ее производная равна $(x^2)' = 2x$.

Действительно, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x+x_0) = 2x_0$.

Пример 3'. Модуль $|x|$ не имеет производной в точке 0.

Действительно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ не существует, поскольку предел при $x \rightarrow +0$ этого отношения равен 1, а предел при $x \rightarrow -0$ равен -1 и, следовательно, предел при $x \rightarrow 0$ не существует

В этом примере мы встретились с ситуацией, когда существуют $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Эти величины называются, соответственно, **правой и левой производной** и обозначаются $f'_{\text{пр}}(x_0)$, $f'_{\text{лев}}(x_0)$. Для существования производной, по теореме 9.4, необходимо и достаточно, чтобы $f'_{\text{пр}}(x_0)$, $f'_{\text{лев}}(x_0)$ существовали и были равны друг другу.

Теорема 17.2.

Функция f , дифференцируемая в точке x_0 , имеет в этой точке производную, и последняя равна коэффициенту k в представлении функции f по формуле (1).

Согласно определению 1, x_0 – предельная точка области определения функции $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. В силу формулы (1), $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k + \alpha(x)$ для всех $x \in \dot{U}(x_0)$. Так как $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, то на основании формулы (2) заключаем, что $f'(x_0)$ существует и равна k .

Из единственности предела следует единственность коэффициента k в формуле (1). Теорема 17.2 показывает, что функция f , дифференцируемая в точке x_0 , представима в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad (3)$$

$$\alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

На основании теоремы 17.2 утверждения примеров 1'-2' являются следствиями соответствующих утверждений примеров 1-2. Вместе с тем, пример 3' показывает, что функция $|x|$ не является дифференцируемой в точке 0.

Теорема 17.3.

Функция f , имеющая производную в точке x_0 , дифференцируема в этой точке.

По условию, существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Следовательно, по теореме о представлении функции, имеющей предел в точке,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha_0(x), \quad (4)$$

где и $\alpha_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

Положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_0(x) & \text{для всех } x \in \dot{U}(x_0) \\ 0 & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

Тогда также $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и по формуле (4') для всех $x \in \dot{U}(x_0)$ справедлива формула (3). Тем самым, f дифференцируема в точке x_0 (с коэффициентом $k = f'(x_0)$).

Таким образом, сказать, что числовая функция дифференцируема в данной точке, или что она имеет в этой точке производную, одно и то же. Нахождение производной функции f' у функции f называют **дифференцированием** этой функции.

17.3. Правила дифференцирования

Дифференцирование линейной комбинации, произведения и частного.

Теорема 17.4

Пусть f имеет производную в точке x . Тогда для любой постоянной c справедлива формула:

$$(cf)' = c \cdot f'$$

(постоянный множитель можно вынести за знак производной).

Приращение функции $cf(x)$ в точке x равно

$$cf(x + \Delta x) - cf(x) = c(f(x + \Delta x) - f(x))$$

Поскольку существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, существует и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = cf'(x), \text{ что и требовалось доказать.}$$

Теорема 17.5.

Пусть f и g имеют производные в точке x . Тогда существует производная суммы этих функций, причём $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Приращение функции $f(x) + g(x)$ в точке x равно $(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) = (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x))$,

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

Напомним, что линейной комбинацией функций f_1, \dots, f_n называют всякую функцию f , представимую в виде $f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot f_k$, где коэффициенты c_k - постоянные. Областью ее определения служит пересечение областей определения функций f_k . Из теорем 17.4 и 17.5 следует

Теорема 17.6. (Линейное свойство операции дифференцирования).

Если функции f_1, \dots, f_n дифференцируемы в точке x , то всякая линейная комбинация $f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot f_k$ этих функций дифференцируема в точке x , причём

$$(\sum_{k=1}^n c_k \cdot f_k)' = \sum_{k=1}^n c_k \cdot f'_k(x).$$

Теорема 17.7

Если функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x , то их произведение $f_1 f_2$ дифференцируемо в точке x , причем

$$(f_1(x)f_2(x))' = f'_1(x)f_2(x) + f_1(x)f'_2(x)$$

Приращение произведения $f_1 f_2$ равно $\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x) - f_1(x)f_2(x)}{\Delta x} =$
 $\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x) - f_1(x)f_2(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f_1(x)f_2(x+\Delta x) - f_1(x)f_2(x)}{\Delta x} = \frac{(f_1(x+\Delta x) - f_1(x))f_2(x+\Delta x)}{\Delta x} +$
 $f_1(x)$

При $\Delta x \rightarrow 0$ выполняются соотношения $\frac{(f_1(x+\Delta x) - f_1(x))f_2(x+\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow f'_1(x)f_2(x)$,
 $\frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \rightarrow f'_2(x)$, $f_2(x + \Delta x) \rightarrow f_2(x)$

Откуда получаем утверждение теоремы.

Теорема 17.8.

Если функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x , и $f_2(x) \neq 0$ то их частное $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ дифференцируемо в точке x , причем

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f'_1(x)f_2(x) - f_1(x)f'_2(x)}{f_2^2(x)}.$$

Сначала докажем лемму

Лемма 17.1. *Если функция f_2 дифференцируема в точке x , и $f_2(x) \neq 0$ то функция $1/f_2(x)$ дифференцируема в точке x , причем*

$$\left(\frac{1}{f_2(x)}\right)' = \frac{-f'_2(x)}{f_2^2(x)}.$$

Приращение имеет вид:

$$\frac{1}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{1}{f_2(x)} = -\frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{f_2(x+\Delta x)f_2(x)}$$

По лемме 6.1 функция $\frac{1}{f_2(x+\Delta x)}$ определена и ограничена в окрестности

точки x . Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{1}{f_2(x)} \right) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x f_2(x+\Delta x) f_2(x)} = - \frac{f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

Теорема 17.8 сразу следует из теоремы 17.7 и леммы 17.1.

17.4. Касательная к графику функции.

Как и нахождение скорости неравномерного движения, нахождение касательной к кривой линии - одна из основных задач, решение которых привело к созданию дифференциального исчисления.

Рассмотрим частный случай задачи о касательной, когда линией служит график функции.

Определение 17.3. Пусть числовая функция f определена на невырожденном промежутке I и непрерывна в его точке x_0 (так что расстояние MM_0 от соответствующей точки $M_0(x_0; f(x_0))$ графика до его точки $M(x; f(x))$, $x \in I$, стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$). **Касательной** к графику функции f в точке M_0 называют такую прямую, проходящую через M_0 , что отношение расстояния MN от точки $M(x; f(x))$, до этой прямой к расстоянию MM_0 от M_0 до M стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$ (т.е. что MN бесконечно мало по сравнению с MM_0 при $x \rightarrow x_0$).

Суть этого определения можно наглядно описать следующим образом: если представить, что точка M движется по линии к точке касания M_0 , то, какова бы ни была точность наблюдения, с некоторого момента точка M , будучи еще отличной от M_0 , уже неотличима от своей проекции N на касательную (рис. 14). Таким образом, кривая, обладающая в точке M_0 касательной, почти сливается с ней вблизи этой точки.

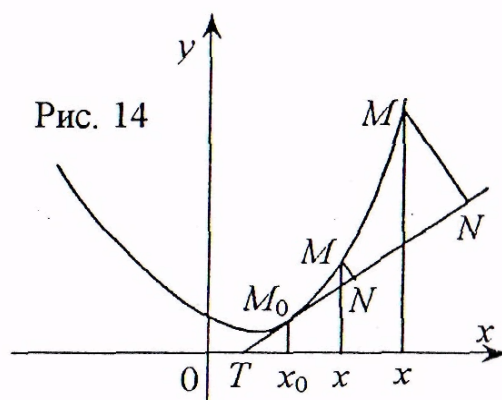


Рис. 14

Теорема 17.9.

Если функция f , определенная на промежутке, дифференцируема в его точке x_0 , то график этой функции имеет в соответствующей точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную, причем угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$.

По условию и по теореме 19.2 предыдущего пункта, представление

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0), \quad (5)$$

справедливо для всех x , принадлежащих некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 , и $\alpha_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, проходящая через точку M_0 , имеет уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x) \cdot (x - x_0). \quad (6)$$

Пусть M - точка графика с абсциссой $x \neq x_0$ и $x \in U(x_0)$ (рис. 15), N - проекция этой точки на

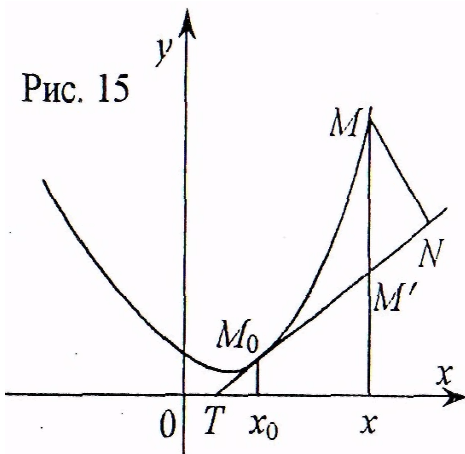


Рис. 15

прямую (6) и M' - точка этой прямой с абсциссой x . Тогда направленный отрезок $M'M$ равен $f(x) - y$, так что, вычитая (6) из (5), получаем $M'M = \alpha(x) \cdot (x - x_0)$. Так как $MN \leq M'M$, а $M_0M \geq |x - x_0|$, то $\frac{MN}{MM_0} \leq \frac{|M'M|}{|x - x_0|}$. Но $\frac{|M'M|}{|x - x_0|} = |\alpha(x)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Следовательно, $\frac{MN}{MM_0} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. (6) - уравнение касательной к графику функции f в его точке M_0 .

Таким образом, нахождение углового коэффициента касательной (как и нахождение скорости) приводит к вычислению производной.

Замечание: Секущая MM_0 имеет угловой коэффициент $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (см. рис. 15). Таким образом теорема 1 показывает, что **угловой коэффициент касательной в точке M_0 есть предел углового коэффициента секущей MM_0 при $x \rightarrow x_0$.**