Билет 18. Производные элементарных функций, производная обратной функции, производная сложной функции, производная функции, заданной параметрически.

Производная степенной функции $y = x^{\mu}$, где μ − любое вещественное число

Область определения этой функции зависит от μ. Имеем (при $x \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Если воспользоваться пределом, вычисленным в теореме 13.4, то получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1}.$$

В частности

если $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, то $y' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

если $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Производная показательной функции $y = a^x$ ($a > 0, -\infty < x < +\infty$)

Здесь $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

Воспользовавшись пределом, вычисленным в теореме 13.4, найдём:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

В частности, если $y = e^x$, то и $y' = e^x$.

Итак, скорость возрастания показательной функции (при $a > 1$) пропорциональна значению самой функции: чем большего значения функция уже достигла, тем быстрее в этот момент она растёт. Это даёт точную характеристику роста показательной функции, о которой мы имели уже случай говорить.

Производная логарифмической функции $y = log_a x$ ($0 < a \neq 1$, $0 < x < +\infty$)

В этом случае $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$.

Воспользуемся пределом, вычисленным в теореме 13.4:

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x}$.

В частности, для натурального логарифма получается исключительно простой результат: при $y = \ln x$ имеем $y' = \frac{1}{x}$.

Это даёт (хотя, по существу, и не новое) основание для предпочтения, которое оказывается натуральным логарифмам при теоретических исследованиях.

<u>Производные тригонометрических функций</u>

Пусть $y = \sin x$, тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Пользуясь непрерывностью функции $\cos x$ и известным пределом $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, получим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$.

Аналогично найдём: если $y = \cos x$, то $y' = -\sin x$.

В случае $y = \tan x$ применима теорема о производной частного, согласно которой

$$\left(\frac{sin\, x}{cos\, x}\right)' = \frac{cos\, x * cos\, x - (-sin\, x)\, sin\, x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Аналогично, если $y = \cos x$, то $y' = -\frac{1}{sin^2 x}$.

<u>Производная обратной функции</u>

Прежде чем заняться вычислением производных от обратных тригонометрических функций, докажем следующую общую теорему.

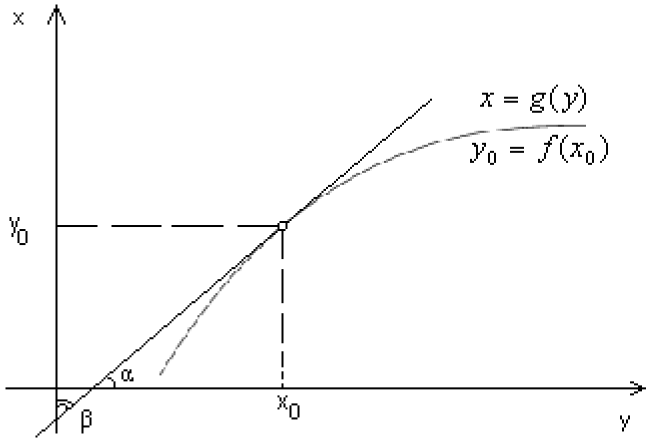
<u>Теорема 18.1.</u> ***Пусть 1) функция $f(x)$ возрастает (или убывает) и непрерывна на некотором промежутке; 2) в точке x_0 этого промежутка имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной функции $g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$.***

Придадим значению $y = y_0$ произвольное приращение Δy, тогда соответственное приращение Δx получит и функция $x = g(y)$. Заметим, что при $\Delta y \neq 0$, ввиду однозначности самой функции $y = f(x)$, и $\Delta x \neq 0$. Имеем $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Если теперь $\Delta y \to 0$ по любому закону, то − в силу непрерывности функции $x = g(y)$ − и приращение $\Delta x \to 0$. Но тогда знаменатель правой части написанного равенства стремится к пределу $f'(x_0) \neq 0$, следовательно, существует предел для левой части, равный обратной величине $\frac{1}{f'(x_0)}$; он и представляет собой производную $g'(y_0)$.

Итак, имеем простую формулу: $x' = \frac{1}{y'}$.

Легко выяснить её геометрический смысл. Мы знаем, что производная y'_x есть тангенс угла α, образованный касательной к графику функции $y = f(x)$ с осью x. Но обратная функция $x = g(y)$ имеет, лишь независимая переменная для неё откладывается по оси y. Поэтому производная x'_y равна тангенсу угла β, составленного той же касательной с осью y (рис.) Таким образом, выведенная формула сводится к известному соотношению $tan\, \beta = \frac{1}{tan\, x}$, связывающему тангенсы двух углов α и β, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$.



Положим для примера $y = a^x$. Обратной для неё функцией будет $x = \log_a y$. Так как $y'_x = a^x \cdot ln\, a$, то по нашей формуле, $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{y}$, в согласии с 3.

Переходя теперь к вычислению производных от обратных тригонометрических функций, мы для удобства обменяем ролями переменные x и y, переписав доказанную формулу в виде $y' = \frac{1}{x'}$.

<u>Обратные тригонометрические функции</u>

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$, причем $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Она является обратной для функции $x = \sin y$, имеющей для указанных значений y положительную производную $x'_0 = \cos y$. В таком случае существует также производная y'_x и равна, по нашей формуле, $y'_x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; корень мы берем со знаком плюс, так как $\cos y > 0$.

Мы исключили значения $x = \pm 1$, ибо для соответствующих значений $y = \pm\frac{\pi}{2}$ производная $x'_y = \cos y = 0$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < \infty)$ служит обратной для функций $x = \operatorname{tg} y$. По нашей формуле $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

Аналогично можно получить:

для $y = \arccos x$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

для $y = \operatorname{arcctg} x$ $y'_x = -\frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

<u>Производная сложной функции</u>

<u>Теорема 18.2 (Теорема о производной сложной функции).</u>

Пусть функция $y = y(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную $y'(x_0)$. Пусть функция $z = z(y)$ определена в окрестности y_0 и имеет в точке y_0 производную $z'(y_0)$.

Тогда сложная функция $Z(x) = z(y(x))$ имеет производную, равную $Z'(x_0) = z'(y_0) \cdot y'(x_0)$.

Придадим x_0 приращение Δx такое, что соответствующее значение $y(x_0 + \Delta x)$ принадлежит окрестности точки y_0, в которой определена функция $z(y)$. Так как $z(y)$, по условию, дифференцируема в точке y_0,$z(y_0 + \Delta y) - z(y_0) = z'(y_0)\Delta y + \beta(\Delta y) \cdot \Delta y$, где $\beta(\Delta y) \to 0$ при $y \to 0$ и $\beta(0) = 0$.

Так как $y(x)$ дифференцируема в точке x_0 ,$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$,где $\alpha(\Delta x) \to 0, \Delta x \to 0$. Таким образом, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

Поэтому $Z(x_0 + \Delta x) - Z(x_0) = z(y_0 + \Delta y) - z(y_0) = z'(y_0)\Delta y + \beta(\Delta y) \cdot \Delta y = z'(y_0)(y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) + \beta(\Delta y)(y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = z'(y_0) \cdot y'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x(z'(y_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta y) \cdot \alpha(\Delta x))$

Так как при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, $\alpha(\Delta x)$, $\beta(\Delta y)$ – бесконечно малые, из этого равенства следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{Z(x_0+\Delta x)-Z(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(z'(y_0) * y'(x_0) + z'(y_0) * \alpha(\Delta x) + \beta(\Delta y) * y'(x_0) + \beta(\Delta y) * \alpha(\Delta x)\right) = z'(y_0) * y'(x_0)$

что и требовалось доказать.

<u>Производная функции, заданной параметрически</u>

Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемые функции на некотором промежутке T; пусть, кроме того, функция $x(t)$ строго возрастает (или убывает) на T и ни в одной точке этого промежутка x'_t не равна 0.

Символ x'_t использован здесь для обозначения производной функции x'_t по переменной t. Тогда существует обратная функция $t = t(x)$, причем ее производная, по теореме **18.1,** равна

$$t_x = \frac{1}{x'_t} \qquad (2)$$

Но тогда уравнения задают $Y(x) = y(t(x))$, и производная этой функции $Y'(x) = y'_t \cdot t'_x$, по теореме **18.2** о производной сложной функции. Используя равенство (**2**), окончательно получаем:

$$Y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (3)$$

Часто вместо равенства (**3**) записывают равносильное ему равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Бывает также, что производные по параметру t обозначают так: $x'_t = \dot{x}$, $y'_t = \dot{y}$. Тогда формула (**3**) принимает вид: $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.