## *Билет 20: Производные и дифференциалы высших порядков*

### 20.1. Последовательные производные.

Производная $f'$ функции $f$, в свою очередь, может иметь производную. Последнюю в этом случае называют второй производной (или производной второго порядка) функции $f$ и обозначают обычно $f''$. Таким образом, $f'' = (f')'$. В соответствии с этим $f'$ называют первой производной (или производной первого порядка) функции $f$. По индукции определяют (в предположении, что они существуют) производные следующих порядков: $f''' = (f'')'$ и т.д. Если $f$ имеет n-ю производную (а, следовательно, и производные всех меньших порядков) во всех точках некоторого промежутка I, то говорят, что функция $f_n$ раз (или n-кратно) дифференцируема на промежутке I. Функцию $f$, имеющую на I производные всех порядков, называют бесконечно дифференцируемой на I (например, показательные функции).

Для обозначения порядка производной, если он невелик, используют также римские цифры (например, $f^{IV}$ – четвертая производная функции $f$). При этом удобно саму функцию $f$ обозначать символом $f^{(0)}$, а n-ю производную функции $f$ - $f^{(n)}$. В таких обозначениях, очевидно, $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$ для всех $k$, $0 \leq k \leq n$.

Итак, функция $f$ имеет в точке $x_0 \in (a, b)$ производную $f^{(n)}(x_0)$ (обозначение: $f \in D^{(n)}(x_0)$) в том и только в том случае, когда в некоторой окрестности $U(x_0)$, $U \subset (a, b)$, существуют производные функции $f^{(k)}$ всех порядков $k$, $1 \leq k \leq (n-1)$, и функция $f^{(n-1)}$ имеет в $x_0$ производную $(f^{(n-1)})'(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Вторая производная имеет важный механический смысл. Если прямолинейное движение материальной точки описывается уравнением $S = f(t)$, то, $V = f'(t)$– скорость точки в момент времени $t$. Величину а $= f''(t)$ называют ускорением точки в момент $t$. Согласно второму закону классической механики, сила $F$, приложенная к точке, пропорциональна ускорению, $F = m \cdot$ а ($m$ – масса точки).

Формула для вычисления n-ой производной некоторых бесконечно дифференцируемых функций.

1. $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ - фиксировано. Поскольку $f'(x) = \alpha \cdot x^{(\alpha-1)}$, $f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot x^{(\alpha-2)}$ то, по индукции: $f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1) \cdot x^{(\alpha-k)}$, $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то $f(x) = x^n$ определена на всем множестве действительных чисел и $(x^n)^{(k)} = n \cdot (n - 1) \ldots (n - k + 1) \cdot x^{(n-k)}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le (n - 1)$. При $k = n$ получим $(x^n)^{(n)} = n!$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (т.к. $(x^n)^{(n-1)} = n!\, x$, $x \in \mathbb{R}$), и поэтому $(x^n)^{(m)} = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $m > n$.
2. $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, то $f^{(k)}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
3. $f(x) = sinx$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $f'(x) = cos\, x = sin\, (x + \frac{\pi}{2})$, то $f''(x) = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))'$ $= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$ , $x \in \mathbb{R}$ , и, по индукции,$f^{(k)}(x)$ $= sin(x + k\frac{\pi}{2})$ , $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
4. $f(x) = cosx$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $f'(x) = -\, sinx = cos(x + \frac{\pi}{2})$, то $f''(x) = (cos\,(x + \frac{\pi}{2}))'$ $= -\, sin(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' = -\, sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x + 2\frac{\pi}{2})$ , $x \in \mathbb{R}$, и, по индукции, $f^{(k)}(x) = cos(x + k\frac{\pi}{2})$ , $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
5. $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ - фиксировано. Как и в примере 1, получим $f'(x) = \alpha \cdot (1 + x)^{(\alpha-1)} \cdot (1 + x)' = \alpha \cdot (1 + x)^{(\alpha-1)}$ , $f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (1 + x)^{(\alpha-2)}$ и $f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1) \cdot x^{(\alpha-k)}$ , $x > -1$, $k \in \mathbb{N}$.
6. $f(x) = ln(1 + x)$ , $x > -1$. Так как $f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, то, на основании примера 5 с $\alpha = -1$, получим $f^{(k)}(x) = (f')^{(k-1)}(x) = ((1 + x)^{-1})^{(k-1)} =$ $(-1) \quad (-2) \ldots (-1 - (k - 1) + 1) \cdot (1 + x)^{-1-(k-1)} = (-1)^{k-1} \cdot (k - 1)!\, (1 + x)^{-k} =$ $\frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

## 20.2. Линейное свойство производных высших порядков

**Теорема 20.1.**

Для любого числа $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, любых функций $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, имеющих в какой-то точке $\boldsymbol{x}$ производные $\boldsymbol{u}^{(n)}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v}^{(n)}(\boldsymbol{x})$, и для любых чисел $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2} \in \mathbb{R}$ функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\lambda_1 u} +$

$\boldsymbol{\lambda_2 v}$ имеет в точке $\boldsymbol{x}$ производную $\boldsymbol{w}^{(n)}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{w}^{(n)}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\lambda_1 u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda_2 v}(\boldsymbol{x}))^{(n)} = \boldsymbol{\lambda_1 u}^{(n)}(\boldsymbol{x})$ + $\boldsymbol{\lambda_2 v}^{(n)}(\boldsymbol{x})$.

**Доказательство.** Поскольку каждая производная высшего порядка получается из производной предыдущего порядка посредством операции дифференцирования, а операция дифференцирования и первая производная обладают свойством линейности, то это свойство переносится на производные всех порядков.

**<u>20.3. n-я производная произведения функций</u>**

**<u>Теорема 20.2.(Г.Лейбниц).</u>**

Если функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ на некотором промежутке имеют производные функции $\boldsymbol{f}^{(n)}$ и $\boldsymbol{g}^{(n)}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, то существует $(\boldsymbol{fg})^{(n)}$ и $(\boldsymbol{fg})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n)} g^{(n-k)} = f g^{(n)} + n f'^{g^{(n-1)}} + \cdots + \frac{n(n-1)-(n-k+1)}{k!} f^{(k)} g^{(n-k)} + \cdots + n f^{(n-1)} g' + f^{(n)} g$

**Доказательство.** Для $n$ = 1 утверждение справедливо по теореме 19.8: вместе с $f$ и $g$ произведение $f \cdot g$ также дифференцируемо и $(f \cdot g)^1 = f \cdot g\,' + f' \cdot g$ = $C_1{}^0 \cdot f^{(0)} \cdot g^{(1)} + C_1{}^0 \cdot f^{(1)} \cdot g^{(0)}$ .

Пусть утверждение теоремы справедливо для n, а функции $f$ и $g$ дифференцируемы на рассматриваемом промежутке ($n$ + 1) раз. Тогда эти функции вместе со своим произведением n-кратно дифференцируемы, и для него справедлива формула (1). Так как в каждом члене правой части этой формулы функции $f^{(k)}$ и $g^{(n-k)}$ дифференцируемы, то по теоремам 19.7, 19.8 функция $(fg)^{(n)}$ дифференцируема, причем $(fg)^{(n+1)} = ((fy)^{(n)})\,' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)} + f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)}) = C_n^0 (f^{(0)} \cdot g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (f^{(k+1)} \cdot g^{(0)}$. Но $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} = C_n^0 f^{(1)} g^{(n)} + C_n^1 f^{(2)} g^{(n-1)} + \cdots + C_2^{n-2} f^{(n-1)} g^{(2)} + C_n^{n-1} f^{(n)} g^{(1)} = \sum_{1 \Leftarrow 1}^{n-1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$ и, принимая также во внимание свойства биномиальных коэффициентов: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$,получаем$(fg)^{(n+1)} = C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$, так что формула (1) верна, если заменить n на n+1 и теорема доказана.

## 20.4. Вторая производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим уравнение: $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, (2)

где $x(t)$, $y(t)$– дважды дифференцируемые функции на некотором промежутке $T$; пусть, кроме того, функция $x(t)$ строго возрастает (или убывает) на T и ни в одной точке этого промежутка $x_t{}'$ не равна 0. В этом случае уравнения (2) задают функцию $Y(x) = y(t(x))$, и производная этой функции равна $Y'(x) = \frac{y_t'}{x_t'}$ (3).

Бывает также, что производные по параметру $t$ обозначают так: $x_t' = \dot{x}$, $y_t' = \dot{y}$. Тогда формула (3) принимает вид: $Y'(x) = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ . Найдём вторую производную функции $Y(x)$:

$$Y''(x) = \frac{d(Y\prime(x)}{dx} = \frac{d\left(Y'(x)\right)/dt}{dx\ /dt} = \frac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})/dt}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

## 20.5. Дифференциалы высших порядков.

Однородную линейную функцию называют линейной формой. Напомним, что если функция $f$ дифференцируема в точке $x$, то дифференциалом $f$ в x называют линейную форму $f'(x)h$. Аналогично, если $f$ дифференцируема дважды в точке $x$, то ее вторым дифференциалом называют квадратичную форму $f''(x)h^2$. Вообще, n-ым дифференциалом $f$ в точке x будет n-ичная форма $f^{(n)}(x)h^n$ (в предположении, что $f^{(n)}(x)$ существует для n-го дифференциала $f$ в точке x используют обозначение $d^n f(x)$ или, более строго $d^n f(x)(h)$.

Таким образом, по определению,

$$d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)h^n \text{ для всех } h \in \mathbb{R} \ (2)$$

Согласно этому определению, $h^n = (dx(h))^n$ есть n-я степень функции $dx(h)$ и потому используют обозначение $(dx(h))^n = dx^n(h)$. Тогда (2) примет вид $d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)dx^n(h)$ для всех $h \in \mathbb{R}$, или равенства

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\ dx^n \ (3)$$

Форма (2) записи n-го дифференциала не инвариантна уже при $n = 2$. Действительно, подставляя вместо $x$ дифференцируемую функцию $\varphi(t)$ в левую часть формулы (2) (при $n = 2$), получим

$$d^2 f(\varphi(t))(h) = (f(\varphi(t)))'' h^2 = (f'(\varphi(t))\varphi'(t))' h^2 = (f''(\varphi(t))\varphi'(t))^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t))h^2 \quad (4)$$

а в результате такой же подстановки в правую часть, имеем

$$f''(\varphi(t))(d\varphi(t)(h))^2 = (f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2)\,(dt(h))^2 = (f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2)h^2 \quad (5)$$

Правые части формул (5) и (4) отличаются слагаемым $(f'(\varphi(t))\varphi''(t))h^2$ .Вообще говоря, это слагаемое не равно нулю. Однако если $\varphi(t)$- линейная функция, то $\varphi''(t) = 0$ и, вообще, для любого $n \geq 2$ имеет место равенство $\varphi^{(n)}(t) = 0$, откуда следует, что формула (3) будет верна и для линейной функции $\varphi(t)$