

Билет 21: Теоремы Ферма, Ролля. Необходимые условия экстремума

Пусть $\dot{U}(a)$ - некоторая проколота окрестность точки a .

Определение 21.1: Точка a – *точка локального максимума* $f(x)$, если для всех $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) < f(a)$. Если для всех $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(a)$, то говорят о точке *нестромого максимума*.

Аналогичным образом определяются точки *локального минимума* и *нестромого локального минимума*. Следует только заменить входящие в определение неравенства неравенствами $f(x) > f(a)$ и $f(x) \geq f(a)$, соответственно.

Обобщающие названия для точек максимума и минимума – *точки экстремума*.

Теорема 21.1(П. Ферма): Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки a . Если в точке a $f(x) \in D(a)$ и функция имеет в этой точке локальный экстремум (минимум или максимум), то $f'(a) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим, для определенности, случай точки минимума. Тогда для всех $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) > f(a)$ или $f(x) - f(a) > 0$. Если $x \in \dot{U}(a)$ и $x > a$, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$.

По условию существует производная $f'(a)$. Значит, существует $f'_{\text{прав}}(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. По теореме о предельном переходе в неравенствах, $f'_{\text{прав}}(a) \geq 0$.

Аналогично, при $x \in \dot{U}(a), x < a$ выполняется неравенство $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$., поэтому $f'_{\text{лев}}(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Так как, $f'(a) = f'_{\text{лев}}(a) = f'_{\text{прав}}(a)$,

должны выполняться неравенства $\begin{cases} f'_{\text{прав}}(a) \geq 0 \\ f'_{\text{лев}}(a) \leq 0 \end{cases}$, из которых следует доказываемое равенство $f'(a) = 0$.

Примечание 1. В точке экстремума производная может не существовать. Примером служит функция $y = |x|$. Она имеет минимум в точке $x = 0$. Однако $f'_{\text{лев}}(0) = -1$, $f'_{\text{прав}}(0) = 1$, и $f'(0)$ не существует.

Примечание 2. Теорема Ферма дает необходимое условие экстремума, но не достаточное, т.е. производная функции в точке может равняться нулю, а экстремума в этой точке нет. Пример: $y = x^3$. Эта функция имеет производную $y' = 3x^2$, обращающуюся в ноль при $x = 0$, однако $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

Следствие (необходимые условия экстремума). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a; b)$, то точками локального экстремума могут быть только такие точки x_0 , в которых производная функции $y = f(x)$ либо не существует, либо обращается в 0.*

Теорема 20.2(М.Ролль). Пусть

1) $f(x) \in C[a; b]$;

2) $f(x) \in D(a; b)$;

3) $f(a) = f(b)$

Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, она принимает на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее значение m (по т. Вейерштрасса).

Если оказалось, что $m = M$, то это означает, что $m = f(x) = M$ для всех $x \in [a; b]$, т.е. функция $y = f(x)$ - постоянная на $[a; b]$. Поэтому для всех $x \in (a; b)$ имеет место равенство $f'(x) = 0$.

Если же $m \neq M$, т.е. $m < M$, то хотя бы одно из этих значений функция принимает во внутренней точке $[a; b]$.

Действительно, по условию 3) значения $f(a)$ и $f(b)$ равны друг другу и могут оказаться равны не более, чем одному из чисел m, M .

Пусть, например, $M = f(c)$, где $c \in (a; b)$. Так как M наибольшее значение функции $f(x)$ на всем отрезке $[a; b]$, то оно будет наибольшим и для $x \in \dot{U}(c)$ т.е. c – точка локального экстремума.

По условию 2), в этой точке существует производная $f'(c)$. По теореме Ферма, $f'(c) = 0$.

Замечание:

Все условия теоремы Ролля являются существенными. Это означает, что, если не выполняется одно из них, а остальные два выполняются, заключение теоремы может оказаться неверным.

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1), \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$

Выполнены условия 2) и 3), не выполнено условие 1). Для всех $x \in (0; 1)$ имеем $f'(x) = 1$.

$$2) f(x) = |x|, x \in [-1; 1]$$

Не выполнено условие 2), условия 1), 3) выполнены. На интервале $(-1; 0)$: $f'(x) = -1$; на интервале $(0; 1)$: $f'(x) = 1$. В точке $x = 0$ производная не существует, поэтому на $(-1; 1)$ нет такой точки, что $f'(x) = 0$

$$3) f(x) = x$$

Выполнены первые 2 условия, третье на отрезке $[0; 1]$ не выполнено. Всюду на $(0; 1)$ имеем $f'(x) = 1$

Следствие теоремы 20.2: Пусть

1) $\varphi(z), \varphi'(z), \dots, \varphi^{(n)}(z) \in C[x_0; x]$;

2) $\varphi^{(n+1)}(z)$ существует для любой $z \in C[x_0; x]$;

3) $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = \varphi(x) = 0$

Тогда существует точка $\xi \in (x_0; x)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Доказательство. Для функции $\varphi(z)$ на отрезке $[x_0; x]$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому существует точка $x_1 \in (x_0; x)$ такая, что $\varphi'(x_1) = 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi'(z)$ на отрезке $[x_0; x_1]$. Для нее также выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $x_2, x_2 \in (x_0; x_1)$, такая что $\varphi''(x_2) = 0$.

Аналогичными рассуждениями получаем, что существуют точки $x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1$ такие, что $\varphi^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_n) = 0$. Наконец, рассмотрим функцию $\varphi^{(n)}(z)$ на отрезке $[x_0; x_n]$. Она тоже удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.к. $\varphi^{(n+1)}(z) = (\varphi^{(n)}(z))'$ существует на $(x_0; x_1)$, значит и на $(x_0; x_n)$. Поэтому, по теореме Ролля, существует точка $\xi \in (x_0; x_n)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Замечание:

Геометрический смысл теоремы Ролля: при ее условиях есть хотя бы одна точка s на интервале $(a; b)$, касательная в которой параллельна оси x .