<u>Билет 24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано</u>

<u>Теорема 24.1</u> ***Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (G.Peano).***

Пусть в окрестности $U\left(x_0\right)$ ***точки*** x_0 ***существуют и непрерывны*** $f(x),\ \dots\ f^{(n-1)}(x)$***. И пусть*** $f^{(n)}(x)$ ***существует в*** $U\left(x_0\right)$ ***и непрерывна в точке*** x_0 ***.***

Тогда $\Delta f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\Delta x^n + \bar{\bar{o}}\left((\Delta x)^n\right)$ ***при*** $\Delta x \to 0$ (1)

Доказательство. Используем предыдущую теорему, в которой число n заменим числом $n - 1$. Тогда

$$\Delta f\left(x_0\right) = f'(x_0)\ \Delta x + \dots + \frac{f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)\Delta x^n}{n!}, \qquad (2)$$

где ξ – между x_0 и x.

При $\Delta x \to 0$ как x, так и заключенное между x_0 и x число ξ стремятся к x_0. Ввиду непрерывности $f^{(n)}$ в точке x_0, $f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}\left(x_0\right) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. при $\Delta x \to 0$.

Подставляя в (2), получаем:

$$\Delta f\left(x_0\right) = f'(x_0)\ \Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\Delta x^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(\Delta x)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, откуда сразу следует заключение теоремы.

<u>Замечания:</u>

1. Вместо формул (7) и (8) предыдущего параграфа имеем, соответственно, $\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2 f(x)}{2} + \ldots + \frac{d^n f(x)}{n!} + \bar{\bar{o}}\left((\Delta x)^n\right)$ при $\Delta x \to 0$ $\Delta x \to 0$. И $\Delta f(0) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \ldots + \frac{d^n f(0)}{n!} + o\left(x^n\right),\ x \to 0$
2. Утверждение теоремы останется справедливым, если предположить, что в окрестности $U\left(x_0\right)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x), \ldots, f^{(n-1)}$ и что существует $f^{(n)}\left(x_0\right)$.

На экзамене это доказывать не требуется, однако ниже приведено доказательство этого утверждения – для тех, кому это интересно.

(Доказать его легче всего, используя правило Лопиталя (билет 26).)

Теорема 24.2. + 26.5.

Пусть в окрестности $U\left(x_0\right)$ ***точки*** x_0 ***существуют и непрерывны*** $f(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$ ***и пусть существует*** $f^{(n)}\left(x_0\right)$***. Тогда***

$$\Delta f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\Delta x^n + \bar{\bar{o}}\left((\Delta x)^n\right) \textit{ при } \Delta x \to 0.$$

Доказательство.

Обозначим $T_n(x) = f'\left(x_0\right)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\Delta x^n,\ \ \Delta x = x - x_0$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ и рассмотрим отношение $\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{\left(x - x_0\right)^n}$. По правилу Лопиталя (теореме 26.1), применённому $n - 1$ раз, имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{\left(x - x_0\right)^n} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{R'_n(x)}{n\left(x - x_0\right)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\left(x - x_0\right)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{\left(x - x_0\right)^n}$$

Из определения $T_n(x)$ следует, что

$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}\left(x_0\right) + f^{(n)}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$ Поэтому,

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{\left(\left(x-x_0\right)^n\right)^{(n-1)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{x-x_0} - f^{(n-1)}\left(x_0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}\left(x_0\right) - f^{(n)}\left(x_0\right)\right) = 0$$

Это означает, что $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \alpha(x)(\Delta x)^n = \bar{\bar{o}}\left((\Delta x)^n\right),\ \Delta x \to 0$, что и требовалось доказать.