Билет 25. Разложения функций e^x, $sinx$, $cosx$, $ln(1+x)$, $(1+x)^\mu$

Применим доказанные формулы Тейлора к функциям, перечисленным выше.

1) Так как $\left(e^x\right)' = e^x$, для всех $k \in N$ выполняется равенство

$$\left(e^x\right)^{(k)} = e^x$$

Следовательно, все эти производные равны 1 при $x = 0$.

Поэтому $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, где ξ – некоторая точка между 0 и x. Другая запись для точки ξ : $\xi = \theta x,\ 0 < \theta < 1$. Это – разложение e^x с остаточным членом ***в форме Лагранжа.***

Формула Тейлора с остаточным членом ***в форме Пеано*** для e^x принимает вид:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}\left(x^n\right),\ x \to 0.$

2)Перейдем к функциям $sin\,x,\ cos\,x$:

$(sin\,x)' = cos\,x$,

$(sin\,x)'' = (cos\,x)' = -\ sin\,x$,

$(sin\,x)''' = (-\ sin\,x)' = -\ cos\,x$,

$(sin\,x)'''' = (-\ cos\,x)' = sin\,x$ и т.д.

Эти равенства означают, что $(sin\,x)^{(n)} = (sin\,x)^{(n+4k)}$ для любого $k \in N$. Поэтому имеет место формула $(sin\,x)^{(n)} = sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, которую легко проверить для $n = 0, 1, 2, 3$, а для остальных n она верна ввиду установленного равенства $(\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(n+4k)}$.

Поэтому при $x = 0$ имеем:

производная порядка $4k$ равна $\sin\left(0 + \frac{4\pi k}{2}\right) = 0$;

производная порядка $4k + 1$ равна $\sin\left(0 + \frac{4\pi k+\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1$;

производная порядка $4k + 2$ равна $\sin\left(0 + \frac{4\pi k+2\pi}{2}\right) = 0$;

производная порядка $4k + 3$ равна $\sin\left(\frac{4\pi k+3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) =- 1$.

Следовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} + \frac{\sin\left(\xi + \frac{2n+3}{2}\pi\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

,

где ξ лежит между 0 и x.

Здесь – небольшая хитрость. Мы разложили функцию до членов степени $2n + 2$, что позволило сделать погрешность меньшей. Конечно, член $0\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$ выписывать не надо, он равен 0, а здесь он был помещён только для разъяснения вышеупомянутой «хитрости». Итак

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} + \frac{\sin\left(\xi + \frac{2n+3}{2}\pi\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

.

Аналогично, $(\cos x)^n = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos\left(\xi + \frac{2n+2}{2}\pi\right) x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Разложения для $\sin x$ и $\cos x$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеют вид:

1. $sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \text{o}\, x^{2n+1},\ x \to 0.$

2. $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o x^{2n+2},\ x \to 0$

3) Перейдем к функции $ln\,(1 + x)$. Ее последовательные производные равны:

$(ln\,(1 + x))' = \frac{1}{1+x} = (1 + x)^{-1},$

$(ln\,(1 + x))'' = \left((1 + x)^{-1}\right)' = -(1 + x)^{-2}$ и т.д.

$(ln\,(1 + x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k - 1)!\,(1 + x)^{-k}$

Вычисленная при $x = 0$, производная порядка k равна $(-1)^{k-1}(k - 1)!$

Поэтому,

$ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}(1 + \xi)^{-n-1}$,

где ξ – некоторая точка между 0 и x.

Разложение с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \bar{\bar{o}}\left(x^n\right)$

4) Вычислим последовательные производные функции $(1 + x)^{\mu}$:

$\left((1 + x)^{\mu}\right)' = \mu(1 + x)^{\mu - 1},$

$\left((1 + x)^{\mu}\right)'' = \mu(\mu - 1)(1 + x)^{\mu - 2},$

$\left((1 + x)^{\mu}\right)^{(k)} = \mu(\mu - 1)K(1 + x)^{\mu - k}$

Вычисленная в точке $x = 0$ производная порядка k равна $\mu(\mu - 1)K\,(\mu - k + 1)$. Поэтому формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + K + \frac{\mu(\mu-1)K(\mu-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)K(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\mu-n-1}x^{n+1}$$

где ξ - между 0 и x. Это так называемое ***биномиальное разложение*** с остаточным членом в форме Лагранжа. Та же формула с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + K + \frac{\mu(\mu-1)K(\mu-n+1)}{n!}x^n + \bar{\bar{o}}\left(x^n\right),\ x\to 0,$$

В качестве примера применения формулы Тейлора рассмотрим задачу нахождения $\sqrt[10]{1000}$ с точностью до $0,001$.

Сначала подготовим ее к применению формулы Тейлора. Для этого, зная, что $2^{10} = 1024$, перепишем вычисляемую величину в виде

$$2\sqrt[10]{\frac{1000}{1024}} = 2\sqrt[10]{1-\frac{24}{1024}} = 2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

Используем биномиальное разложение при $\mu = \frac{1}{10},\ x = -\frac{3}{128}$

Число n членов разложения выберем, исходя из заданной точности. Для этого найдем n такое, чтобы:

$$\left|\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)K\left(\frac{1}{10}-n\right)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{10}-n-1}\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| < 0,0005 \qquad (1)$$

(тогда при умножении на стоящий впереди коэффициент 2 получаем требуемую точность $0,001$).

Очевидно (да, дорогие читатели, это очевидно), что:

$$\left|\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)K\left(\frac{1}{10}-n\right)}{(n+1)!}\right| < \frac{1}{10}\frac{1}{n+1}$$

Далее, ξ – между 0 и $-\frac{3}{128}$, поэтому $\frac{125}{128} < 1 + \xi < 1$ и

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{n+1} > \left(\frac{128}{125}\right)^{n+1-\frac{1}{10}} > (1 + \xi)^{\frac{1}{10}-n-1} > 1,$$ поэтому

$$\left|(1 + \xi)^{\frac{1}{10}-n-1}\left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| < \left|\left(\frac{128}{125}\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| = \left(\frac{3}{125}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{40}\right)^{n+1}$$

Итак, абсолютная величина левой части неравенства (1) не больше, чем

$$\frac{1}{10}\ \frac{1}{(n+1)}\ \frac{1}{(40)^{n+1}} \qquad (2)$$

Поэтому если число (2) окажется меньше, чем $0,0005$, то и остаточный член формулы будет меньше $0,0005$ и требуемая точность будет достигнута.

Сразу ясно, что при $n = 1$ число $\frac{1}{10}\frac{1}{2}\frac{1}{40^2} = \frac{1}{32000} < 0,0005$.

Поэтому требуемую точность для приближенной величины даёт приближенная формула:

$$\sqrt[10]{1000} \approx 2 + \frac{2}{10}\left(-\frac{3}{128}\right) = 2 - \frac{3}{640}.$$