Билет 26: Правила Лопиталя

Приведённые ниже теоремы принадлежат, в основном, Лопиталю (Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital) и И.Бернулли (Joh.Bernoulli).

Неопределённость типа $\frac{0}{0}$

Теорема 26.1. ***Пусть: 1)*** $\boldsymbol{f(x), g(x) \in C\left(\mathring{U}(x_0)\right)}$

2) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0}$

3) $\boldsymbol{f(x), g(x) \in D(\mathring{U}(x_0))}$

$\boldsymbol{\forall x \in \mathring{U}(x_0)\ g'(x) \neq 0}$

4) существует (конечный или нет) предел

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k}$$

Тогда и

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k}$$

Доказательство. Дополним определение функций $f(x)$ и $g(x)$, положив их при $x = x_0$ равными нулю: $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда эти функции окажутся непрерывными во всём замкнутом промежутке $[x, x_0]$: их значения в точке а совпадают с пределами при $x \to x_0$ [ввиду пункта 2)], а в прочих точках непрерывность вытекает из существования конечных производных [см. пункт 3)]. Применяя теорему Коши, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $x_0 < c < x$. То обстоятельство, что $g(x) \neq 0$, т. е. $g(x) \neq g(x_0)$, есть следствие предположения: $g'(x) \neq 0$, как это было установлено при выводе формулы Коши.

Когда $x \to x_0$, очевидно, и с $\to x_0$, так что, в силу 4),

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказанная теорема сводит предел отношения функций к пределу отношения производных, если последний существует. Часто оказывается, что нахождение предела отношения производных проще и может быть осуществлено элементарными приёмами.

Теорема 1 легко распространяется на случай, когда аргумент x стремится к бесконечному пределу: $a = \pm\infty$. Именно, имеет место, например.

Теорема 26.2. ***Пусть:***

1) функции $\boldsymbol{f(x)}$ и $\boldsymbol{g(x)}$ определены в промежутке $[\boldsymbol{c}, +\infty)$, где $\text{с} > \mathbf{0}$

2) $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$, $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

3) существуют в промежутке $[\boldsymbol{c}, +\infty)$ конечные производные $\boldsymbol{f'(x)}$ и $\boldsymbol{g'(x)}$, причём $\boldsymbol{g'(x) \neq 0}$

4) существует (конечный или нет) предел

$$\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.}$$

Тогда и

$$\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.}$$

Доказательство. Преобразуем переменную x по формуле $x = \frac{1}{t}, t = \frac{1}{x}$. Тогда, если $x \to +\infty$, то $t \to +0$, и обратно. $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{t \to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} =$

$$\lim_{t \to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) * \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) * \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \to +0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}$$

Тогда по предыдущей теореме : $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} = \lim\limits_{t \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

<u>Неопределённость вида.</u> $\frac{\infty}{\infty}$

Обратимся к рассмотрению неопределённых выражений вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к ∞ (при $x \to x_0$).

В этом случае применимо то же правило Лопиталя: следующая теорема есть простая перефразировка теоремы 26.1.

<u>**Теорема 26.3**</u> ***Пусть:***

1) $f(x), g(x) \in C\left(\mathring{U}(x_0)\right)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty,$

3) $f(x), g(x) \in D\left(\mathring{U}(x_0)\right)$

$\forall x \in \mathring{U}(x_0)\ g'(x) \neq 0$

4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Тогда и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$

Теорема 26.4 ***Пусть:***

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[c, +\infty)$, где $c > 0$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,

3) существуют в промежутке $[c, +\infty)$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причём $g'(x) \neq 0$,

4) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Теоремы 26.3 и 26.4 даны БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. На экзамене следует знать их формулировки.

Правило Лопиталя позволяет доказать замечание, сделанное в конце 24 вопроса. **На экзамене это доказывать не требуется, однако ниже приведено доказательство этого утверждения – для тех, кому это интересно.**

Теорема 26.5+24.2. ***Пусть в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда***

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n \overline{\overline{o}}((\Delta x)^n) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Доказательство. Обозначим $T_n(x) = f'(x_0)\Delta x + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n, \Delta x = x - x_0$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ и рассмотрим отношение $\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. По правилу Лопиталя (теореме 26.1), применённому $n-1$ раз, имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{(x-x_0)^n}.$$

Из определения $T_n(x)$ следует, что $T_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x_0)+f^n(x_0)(x-x_0)$.

Поэтому $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{((x-x_0)^n)^{(n-1)}}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n-1)}(x_0)\right)=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right)=0$. Это означает, что $R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\alpha(x)(\Delta x)^n=o((\Delta x)^n),\Delta x\to 0$, что и требовалось доказать.