Билет 27: Монотонность функции. Достаточные условия экстремума функции

Определение 27.1

Функция $f(x)$, определенная на промежутке X, ***возрастает*** на этом промежутке, если для любых $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке X, ***не убывает*** на X, если для любых $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке X, ***убывает*** на X, если для любых $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке X, ***не возрастает*** на X, если для любых имеет место неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Общее название рассмотренных функций - ***монотонные функции***.

Ясно, что если функция возрастает на X, то она, тем более, не убывает на X (но не наоборот). Аналогичное замечание справедливо для убывающей функции.

Общее название возрастающих, убывающих функций – ***строго монотонные функции.***

Теорема 27.1.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Она не убывает (не возрастает) на (a, b) тогда и только тогда, когда для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает на (a, b) (случай невозрастания рассматривается аналогично). Тогда рассмотрим произвольную точку $x \in (a, b)$ и приращения Δx такие, что $x + \Delta x \in (a, b)$. Если $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$ и $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Если $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$, но все равно $\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x} \geq 0$. Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ существует и равен $f'(x)$. По теореме 7.1 этот предел ≥ 0.

Обратно пусть для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$. Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. К отрезку $[x_1, x_2]$ можно применить теорему Лагранжа. Действительно, т.к. $f(x)$ дифференцируема на (a, b), то она непрерывна на (a, b), а, значит, и на $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Также по условию она дифференцируема на $(x_1, x_2) \subset (a, b)$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$.

Теорема 27.1 допускает уточнение

Теорема 27.2.

Пусть $f(x)$ дифференцируема на $(a. b)$ и для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$. Тогда $f(x)$ возрастает на (a, b).

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, получаем, что для любых $x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$.

Замечание:

Утверждать, что если функция возрастает, то для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ нельзя. Пример функции $f(x) = x^3$ показывает, что хотя эта функция возрастает на всей прямой, есть точка $x = 0$, в которой ее производная равна 0.

Таким образом, даже возрастание функции $f(x)$ гарантирует, по теореме 27.1, лишь нестрогое неравенство $f'(x) \geq 0$.

В теореме Ферма установлено необходимое условие экстремума: ***если функция f имеет производную f' в точке экстремума x, то $f'(x) = 0$.***

Как показывает пример из предыдущего замечания, $f(x) = x^3$, это условие не является достаточным.

<u>Теорема 27.3.</u>

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ и пусть $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда x_0 - точка минимума. Если же $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 - точка максимума.

Доказательство. Проведём доказательство для точки минимума. Пусть $x \in U(x_0)$, и $x_1 \neq x_0$.

Если $x_1 < x_0$, то применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_0]$: $f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi)(x_0 - x_1) < 0$.

Если $x_1 > x_0$, то применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_0, x_1]$: $f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi)(x_0 - x_1) < 0$,

Поэтому $f(x_0) - f(x_1) < 0$. Таким образом, x_0 - точка минимума.

<u>**Теорема 27.4**</u>.

Пусть $f(x)$, $f'(x) \in C(U(x_0))$, $f''(x)$ ***существует в*** $U(x_0)$ ***и*** $f''(x) \in C(x_0)$***. Пусть*** x_0 ***такова, что*** $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$.

Тогда если $f''(x_0) < 0$***, то*** x_0 ***- точка максимума, если*** $f''(x_0) > 0$***, то*** x_0 ***- точка минимума.***

Доказательство. Условия теоремы дают возможность применить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, т.е. теорему 24.1, согласно которой, с учётом равенства $f'(x_0) = 0$, имеем $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + \alpha(\Delta x)\Delta x^2$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Пусть $\varepsilon = \frac{|f''(x_0)|}{4}$. Так как $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, существует $\delta > 0$ такое, что для любых Δx: $|\Delta x| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha(\Delta x)| < \varepsilon = \frac{|f''(x_0)|}{4}$.

Это означает, что модуль второго слагаемого в сумме $\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + \alpha(\Delta x)\Delta x^2$ не превосходит половины модуля первого слагаемого, т.е. $\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2$, поэтому знак этой суммы совпадает со знаком $\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2$. Но знак этой величины совпадает со знаком $f''(x_0)$ как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$, так как $(\Delta x)^2 > 0$. Следовательно, приращение $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не меняет знак в окрестности точки x_0 и знак его совпадает со знаком $f''(x_0)$. Это и означает, что если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума, а если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

Ещё более тонкий достаточный признак экстремума содержится в следующей теореме.

Теорема 27.5.

Пусть $f(x), f'(x),..., f^{(n-1)}(x) \in C(U(x_0))$, $f^{(n)}(x)$ ***существует в*** $U(x_0)$ ***и*** $f^{(n)}(x) \in C(x_0)$. ***Пусть точка*** x_0 ***такова, что*** $f'(x_0) =... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$***, а*** $f^{(n)}(x) \neq 0$. ***Тогда если*** n ***– чётное число, то в точке*** x_0 ***есть экстремум, минимум при*** $f^{(n)}(x) > 0$***, максимум при*** $f^{(n)}(x) < 0$.

Если же n ***– нечётное число, то в точке экстремума нет.***

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, получаем равенство $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \alpha(\Delta x)\Delta x^n$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$

при $\Delta x \to 0$, из которого точно так же следует, что знак приращения $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ совпадает со знаком $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$ при условии $|\Delta x| < \delta$.

Если n – чётное число, то, как и в предыдущей теореме, $\Delta x^n > 0$ как для $\Delta x > 0$, так и для $\Delta x < 0$, поэтому знак приращения совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, и заключение теоремы становится очевидным.

Если же n – нечётное число, то величина Δx^n положительна при $\Delta x > 0$ и отрицательна при $\Delta x < 0$, поэтому приращение $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ меняет свой знак в произвольной окрестности точки x_0, следовательно, в точке x_0 нет экстремума.