Билет 28:Выпуклость графика функции

.**Выпуклость непрерывной функции**

Определение 28.1. Непрерывная на интервале (a, b) функция f, называется ***выпуклой вниз*** (соответственно, ***выпуклой вверх***), если для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, и любого числа $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \quad (1)$$

(соответственно, неравенство

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \quad (1')$$

В правой части неравенства (1) стоит значение функции f в произвольной точке

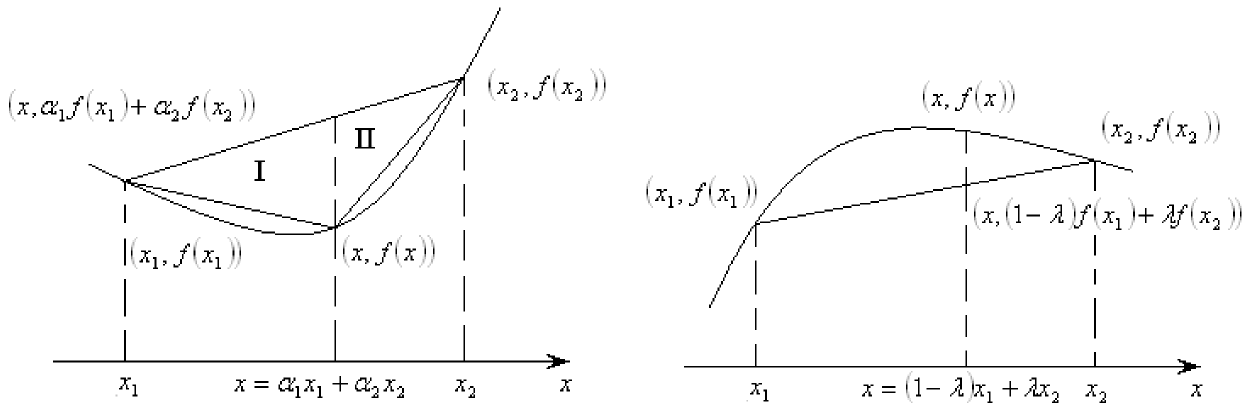
$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$$

расположенной на отрезке $[x_1, x_2]$, содержащемся в интервале (a, b). Левая часть в (1) выражает собой ординату точки координатной плоскости, абсцисса которой равна

$$\alpha = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$$

и которая лежит на прямолинейном отрезке (хорде), соединяющем точки $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$ графика функции f.

Итак, если непрерывная функция f выпукла вниз на интервале (a, b), то для любых его точек $x_1, x_2 \in (a, b), x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, график функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ расположен ниже хорды, стягивающей концевые точки графика на этом отрезке (см. рис.1, а)).



a) b)

Рис.1

Аналогично, заключаем, что если непрерывная функция f выпукла вверх на интервале (a, b), то для любых его точек $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, график функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ расположен выше хорды, стягивающей концевые точки графика на этом отрезке (см. рис.1, b)).

Обозначим $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = x$. Тогда $\lambda(x_2 - x_1) = x - x_1$, откуда $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, 1 - \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$.

Неравенство (1) принимает вид

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

или, после умножения обеих частей его на множитель $x_2 - x_1 > 0$,

$(x_2 - x_1) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0$

Поскольку

$$x_2 - x_1 = (x_2 - x) = (x - x_1)$$

то после элементарных преобразований неравенство (3) переходит в неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

справедливое для любого $x, x_1 < x < x_2$.

Итак, условие (1) равносильно получившемуся неравенству.

В случае выпуклости вверх знаки неравенств следует сменить на противоположные.

Выпуклость дифференцируемой функции

Теорема 28.1. ***Для того, чтобы дифференцируемая на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ функция $\boldsymbol{f}$ была выпукла вниз (вверх) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы её производная функция $\boldsymbol{f'}$ не убывала (не возрастала) на этом интервале.***

Доказательство. Доказательство проведём для выпуклой вниз функции. Докажем сначала, что её производная не убывает.

Пусть $[x_1, x_2] \subset (a, b)$, $x_1 < x_2, f \in D(a, b)\, f \in ([a, b])$. Переходя в неравенстве (4) к пределу при $x \to x_1$, получим:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Аналогично:

$$\lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Следовательно:

$$f'(x_1) = f'(x_{2)}$$

Поскольку это верно для любых x_1, x_2, производная не убывает, это и требовалось.

Обратно, пусть производная функция f' не убывает на (a,b). Пусть $[x_1, x_2] \subset (a,b), x_1 < x_2$. Следует доказать, что выполняется неравенство (4). Для этого заметим, что $f(x)$ дифференцируема на (a,b), следовательно, непрерывна на (a,b) и непрерывна на $[x_1, x_2] \subset (a,b)$. Тогда по теореме Лагранжа, применённой к отрезку $[x_1, x_2]$ где $x_1 < x < x_2$, находим:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f'(c_1)(x - x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), x_1 < c_1 < x$$

Аналогично, по теореме Лагранжа, применённой к отрезку $[x, x_2]$,

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f'(c_2)(x_2 - x)}{x_2 - x} = f'(c_2), x < c_2 < x_2$$

Так как f' не убывает на (a,b), выполняется неравенство $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, из которого следует, ввиду выше приведенных неравенств, неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

равносильное выпуклости вниз рассматриваемой функции.

<u>Теорема 28.2</u>. *Функция $f(x)$, дифференцируемая на интервале (a,b), тогда и только тогда выпукла вниз на этом интервале, когда для любой точки $x_0 \in (a,b)$ и любой точки $x \in (a,b)$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.*

Противоположное неравенство $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, справедливо для всех, $x, x_0 \in (a,b)$ тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ выпукла вверх на (a,b).

Доказательство. Доказательство проведём для случая выпуклой вниз функции. Пусть сначала дифференцируемая функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b)**.** Тогда, как установлено в теореме 28.1, справедливы неравенства (5) и (6). Неравенство (5) можно преобразовать к равносильному виду

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (9)$$

Преобразование состоит в умножении обеих частей неравенства (5) на положительный знаменатель и замене обозначений: точку x_1 заменяем на x_0, а точку x_2 – на точку x, считая, что $x_0 < x$. Точно также, при $x_0 > x$, преобразуем неравенство (6), заменяя точку x_1 на точку x, а точку x_2 – на x_0. После этого преобразования снова получим неравенство (9).

Таким образом, если дифференцируемая функция выпукла вниз на интервале (a,b), то для всех $x, x_0 \in (a,b)$ выполняется неравенство (9). Для выпуклой вверх функции имеем, соответственно, $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Обратно, пусть для всех $x, x_0 \in (a,b)$ выполняется неравенство (9).

Рассмотрим произвольные точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Применяя неравенство (9) к точке $x_0 = x_1$ и считая $x = x_2$, получим неравенство $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$, а применяя его к точке $x_0 = x_2$ и считая $x = x_1$, получаем неравенства$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$, на основании которых, с учётом условия $x_2 - x_1 > 0$, имеем

$$f(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f(x_1)$$

Следовательно, производная функции f' не убывает на (a,b). По теореме 30.1 функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b)**.**

Геометрически свойство выпуклости вниз дифференцируемой функции f на (a,b) означает, что её график в пределах этого интервала располагается выше касательной, проведенной в любой точке графика; для выпуклой вверх дифференцируемой функции картина противоположная (см. рис. 2).

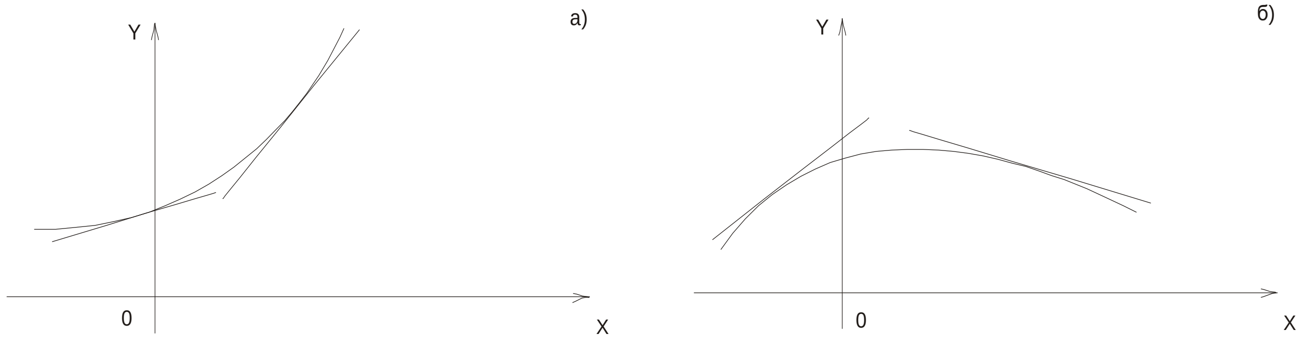


Рис.2

Замечание:

Если обозначить $\Delta(x;x_0) = \Delta(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$,то свойство выпуклости вниз (вверх) дифференцируемой функции f на (a,b) равносильно тому, что для любой точки $x_0 \in (a,b)$ неравенство $\Delta x \geq 0$ ($\Delta x \leq 0$) справедливо для всех $x \in (a,b)$. Отметим, что $\Delta(x_0, x_0) = \Delta(x_0) = 0$

3.**Выпуклость дважды дифференцируемой функции**

Теорема 28.3. ***Для того чтобы функция $\boldsymbol{f}$, дважды дифференцируемая в интервале $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, была выпуклой вниз (вверх) на $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{f''(x) \geq 0}$ ($\boldsymbol{f''(x) \leq 0}$) во всех точках $\boldsymbol{x \in (a,b)}$.***

Доказательство. Согласно критерию монотонности функции на промежутке (теорема 27.1), условие $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для всех $x \in (a,b)$ является необходимым и достаточным условием возрастания (убывания) производной функции $f'(x)$ на (a,b). Последнее свойство, согласно теореме 28.1 предыдущего пункта, является необходимым и достаточным условием выпуклости вниз (вверх) функции f на интервале (a,b).

Точки перегиба

Определение 28.2. Точку кривой $M\big(x_0, f(x_0)\big), x_0 \in (a, b)$, называют ***точкой перегиба***, если она отделяет участок кривой, где функция выпукла вверх, от участка кривой, где функция выпукла вниз.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то по теореме 28.1 в некоторой окрестности абсциссы $x_0 \in (a, b)$ точки перегиба её производная либо возрастает слева от точки $x_0 \in (a, b)$, а справа от неё убывает, либо наоборот. В первом случае рассматриваемая точка будет точкой максимума производной $f'(x)$, во втором случае – точкой минимума. Если предположить существование $f''(x_0)$, то по теореме Ферма, применённой к функции $f'(x)$, получим: $f''(x_0) = 0$.

Это условие играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играло условие $f'(x) = 0$ в отношении точек экстремума, т.е. оно является необходимым, но не достаточным. Действительно, функция $y = x^4$, очевидно, выпукла вниз, но её вторая производная, равная $12x^2$, обращается в ноль при $x = 0$.

Достаточное условие точки перегиба даёт следующее правило, вытекающее из теоремы 28.3:

если при переходе через значение $\boldsymbol{x = x_0}$ вторая производная$\boldsymbol{f''(x)}$ меняет знак, то налицо перегиб. Если же знак не меняется, то перегиба нет.

Используя формулу Тейлора, так же, как и при исследовании функции на экстремум, можно доказать следующее утверждение:

если $\boldsymbol{f''(x_0) = 0, f'''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0}$, и если $\boldsymbol{n}$ – нечётное число, то в точке $\boldsymbol{x_0}$ имеется перегиб, если же $\boldsymbol{n}$ – чётное число, то перегиба нет.